

$$\text{Alors } M = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P$$

$$\text{donc : } \chi_M(X) = X^{n-2} (X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 \lambda_2)$$

$$\text{On a } \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(M)$$

$$M^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P$$

$$\text{donc } \text{Tr} M^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

$$\text{Tr} M = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \text{on, } \lambda_1 \lambda_2 &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{2} \\ &= \frac{(\text{Tr} M)^2 - \text{Tr}(M^2)}{2} \end{aligned}$$

Q25 Eleftherios

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ & $A^k = A + I_n$ avec $k \geq 3$ impair

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \in \text{sp}(A)$. On a

$$\lambda^k - \lambda - 1 = 0$$

Mq $P = X^k - X - 1$ n'a pas de racines réelles

On l'est pas racine

Soit $x < 0$. On pose $a = -x$

$$\begin{aligned} \text{On a } x^k - x - 1 &= (-a)^k + a - 1 \\ &= a - a^k - 1 \end{aligned}$$

Si $x \in]-\infty, -1]$, alors $a^k \geq a$

$$\Rightarrow a - a^k - 1 < 0$$

Si $x \in]-1; 0[$ alors

$$0 \leq a^h < a < 1 \quad \text{donc } a - a^h - 1 < 0$$

Donc $\forall x \in]-\infty; 0[$, $P(x) < 0$

Dans $\mathbb{C}$, on note $(x_1, \dots, x_p)$ de multiplicité

$(m_1, \dots, m_p)$ les valeurs propres réelles de

A et $(\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \alpha_p, \bar{\alpha}_p)$ et

$(m_1, \dots, m_p)$ leur multiplicité

$$\text{d'où } \det(A) = \prod_{i=1}^p x_i^{m_i} \prod_{i=1}^p (\alpha_i \bar{\alpha}_i)^{m_i} > 0$$

$\prod_{i=1}^p |\alpha_i|^2$

Ex 75 Nicolas

$$\text{On a } \begin{cases} A^2 \times A = A \times A^2 \\ A^2 \text{ dy à spectre simple} \end{cases}$$

donc A^2 et A codiagonalisables

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \begin{cases} A^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{pmatrix} P \\ A = P^{-1} \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm \sqrt{n} \end{pmatrix} P \end{cases}$$

$$\text{Puis } P = (P_1 \dots P_n) = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, P_k = \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ p_{2,k} \\ \vdots \\ p_{n,k} \end{pmatrix} = 0$$