

$$= \dots$$

$$= \frac{n!}{m_1! x \dots x m_p!}$$

Exercice 424 : (William)

a. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ non trigonalisable.

χ_A non scindé dans $\mathbb{R}$.

χ_A admet $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ comme racine et donc $\bar{\lambda}$ aussi de n multiplicité.

$$\chi_A = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})(X - \alpha) \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

• si $\alpha = \lambda$: On a que $m(\lambda) \neq m(\bar{\lambda})$ ce qui est impossible

$\Rightarrow \chi_A$ admet 3 racines $\neq$ dans $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow \chi_A$ SRS dans $\mathbb{C} \Rightarrow A$ est $\mathbb{C}$ diagonalisable.

b. Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$

(i) A $\mathbb{R}$ trigonalisable

(ii) $A \in \mathbb{C}$ diagonalisable

(iii) A $\mathbb{R}$ semblable à $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $B, C \in M_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \bar{\gamma})$$

• $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc $\bar{\alpha}$ racine de χ_A de n multiplicité que α

χ_A est de la forme $\chi_A(X) = \underbrace{(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})}_{\text{non scindé sur } \mathbb{R}[X]}(X - \beta)(X - \gamma)$

1^{er} cas: $B = \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\chi_A(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})(X - \gamma)^2$$

Donc $\dim E_{\alpha}(A) = \dim E_{\bar{\alpha}}(A) = 1$.

• si $\dim E_{\gamma}(A) = 2 \Rightarrow A \in \mathbb{C}$ diagonalisable.

- Si $\dim E_\gamma(A) = 1$

On prend 2 vecteurs propres associés respectivement à $\alpha, \bar{\alpha}$ et γ .

On les note $e_\alpha, e_{\bar{\alpha}}, e_\gamma$ et on complète $(e_\alpha, e_{\bar{\alpha}}, e_\gamma)$ en une base de $\mathbb{C}^4$, qu'on note B .

Dans cette base, A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{\alpha} & 0 & b \\ 0 & 0 & \gamma & c \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Par définition de e_α , $A e_\alpha = \alpha e_\alpha$

$$A e_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha} e_{\bar{\alpha}}$$

On peut prendre $e_{\bar{\alpha}} = \bar{e}_\alpha$

On a que $(e_\alpha, \bar{e}_\alpha)$ forme des vecteurs propres associés à des valeurs propres $\neq$

$$\left(\operatorname{Re}(e_\alpha), \operatorname{Im}(e_\alpha), \operatorname{Re}(\bar{e}_\alpha), \operatorname{Im}(\bar{e}_\alpha) \right)$$

$$\alpha = a + ib$$

$$\tilde{A} \text{ IR semblable à } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = Z$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{\alpha} & 0 & b \\ 0 & 0 & \gamma & c \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} Z & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & \gamma & c \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ cas (iv)}$$

encore d'annonce, le cas (iii) est faux.

Sous cas $\beta \neq \gamma$.

$$\chi_A(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)(x - \gamma)$$

χ_A SANS dans $\mathbb{C}$, A n'est diagonalisable.

3^e sous cas: $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\bar{\beta} = \gamma = \alpha$

$$\chi_A(x) = (x - \alpha)^2 (x - \bar{\alpha})^2$$

$$\text{Si } \dim E_\alpha(A) = 1 = \dim E_{\bar{\alpha}}(A)$$

On prend comme précédemment $e_\alpha, \bar{e}_\alpha$ deux vecteurs propres associés à α et $\bar{\alpha}$

On complète $(e_\alpha, \bar{e}_\alpha)$ en une base de $\mathbb{C}^4$.

$$A \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} \boxed{x \ 0} & a \ c \\ \boxed{0 \ \bar{x}} & b \ d \\ \hline \boxed{0 \ 0} & \boxed{x \ e \\ 0 \ 0} & \boxed{0 \ \bar{x}} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A'}$

$$\alpha = a + ib.$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \bar{x} \end{pmatrix} \text{ IR semblable } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$A' \in M_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable donc $\mathbb{C}$ semblable à

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \bar{x} \end{pmatrix} \text{ qui lui est semblable à } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Donc A est IR semblable à $\begin{pmatrix} z & c \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$

Exercice 459: (Évariste)

$$M \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tq } M^2 = \mathcal{O}_{(3,3)}$$

$$\text{rg}(M) = 0 \quad M = 0 \Rightarrow M^2 = 0$$

$$\text{rg } M = 1: M \text{ nilpotente} \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0$$

si $\text{rg} = 1$

$$\Rightarrow \det M = 0$$

$$\chi_M = X^3 \Rightarrow \text{tr}(M) = 0$$

$$\boxed{\text{E}} \quad \dim \text{Ker } M = 2$$

$$\chi_M = X^2(X - \alpha) = X^3 - \alpha X^2$$

$$\text{identification à } \chi_M = X^3 - \text{tr } M X^2$$

$$\alpha = \text{tr } M = 0.$$

$$\text{donc } \chi_M = X^3 \text{ donc } M \text{ nilpotente.}$$

$$\bullet \text{rg} \geq 2: \dim \text{Ker } M \leq 1.$$

$$\text{pas possible d'avoir } M^2 = 0$$

$$S = \{M \in M_3(\mathbb{R}) : \text{tr}(M) = 0 \text{ et } \text{rg}(M) \leq 1\}.$$