

Martin

[517]

$$\|x\| = \|y\| = 1$$

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + ty\|^2 &= (1-t)^2 + t^2 + 2t(1-t)\langle x|y \rangle \\ &\leq 2t^2 - 2t + 1 - 2t - 2t^2 = 1 \end{aligned}$$

C.S.

$$\left\{ \langle x|y \rangle \leq \sqrt{\|x\|\|y\|} = 1 \right.$$

$$\text{d'où } x = \lambda y \quad \lambda = \pm 1$$

si $\lambda = 1$: $x = y$ absurde car x et y sont distincts

d'où $\leq \rightarrow <$ dans l'inégalité de C-S
 i.e. $(1-t)x + ty$ pas unitaire

[418] Nicolas

[$\Rightarrow$] A dz

$$\exists Q \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ q } A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} Q$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant

Par d'Alambert - Gauss : $\exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ tq

$$\begin{cases} \lambda = P(\alpha_1) \\ \mu = P(\alpha_2) \end{cases}$$

$$\text{donc } A = Q^{-1} P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} Q$$

$$\text{donc } M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

⊆ Par l'absurde, A non dz.

$$\Rightarrow A \text{ semblable à } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, cherchons M dans $M_2(\mathbb{C})$ tq $A = P(M)$

Analyse : Soit $M \in M_2(\mathbb{C})$, $A = P(M)$

• M non dz sinon A serait dz

$$M \text{ semblable à } \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

On a $A = P(M)$ donc $\begin{cases} AM = MA \\ A \text{ et } M \text{ sont triangulisables} \end{cases}$

donc A et M cotriangulisables

donc $\exists Q \in GL_2(\mathbb{C})$ tq

$$\begin{cases} A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q & \alpha \neq 0 \\ M = Q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} Q & \alpha_2 \neq 0 \end{cases}$$

Calculons $P(M)$:

$$M^k = Q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1^k & k\alpha_1^{k-1}\alpha_2 \\ 0 & \alpha_1^k \end{pmatrix} Q \text{ par récurrence}$$

Par linéarité :

$$P(M) = Q^{-1} \begin{pmatrix} P(\alpha_1) & \alpha_2 P'(\alpha_1) \\ 0 & P(\alpha_1) \end{pmatrix} Q$$

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q \quad \alpha \neq 0$$

Nécessairement
$$\begin{cases} P(\alpha_1) = \lambda \\ \alpha_2 P'(\alpha_1) = \alpha \end{cases}$$

Posons : $P(X) = X^2 + \lambda$

Par l'absurde, si $P(M) = A$

$$M = Q^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} Q$$

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Q$$

On a $P(\alpha_1) = \lambda$ donc $\alpha_1 = 0$

donc $P'(\alpha_1) = P'(0) = 0$ et $\alpha \neq 0$

donc $\alpha \neq \alpha_2 P'(\alpha_1)$

Remarque M. Fagebauer :

$$P = X^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow P(M) = M^2 + \lambda I_2 = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui n'a pas de solution}$$

445

Amis

$$M^T = I_3 - M^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= I_3 - (M^2)^T = I_3 - (M^T)^2 \\ &= I_3 - (I_3 - M^2)^2 \\ &= 2M^2 - M^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M^4 + M - 2M^2 = 0$$