

ex 386 (Wallon)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$

a) Soit λ valeur propre $\neq 0$ de $A\bar{A}$ et X vecteur propre associé.

$$A\bar{A}X = \lambda X$$

$$\bar{A}A\bar{X} = \bar{\lambda} \bar{X}$$

$$A\bar{A}(A\bar{X}) = \bar{\lambda} A\bar{X}$$

donc $A\bar{X}$ est vecteur propre de $A\bar{A}$

b) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, vecteur propre de $A\bar{A}$, X .

Soit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mu_1 A\bar{X} + \mu_2 X = 0$.

• Si $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$, $A\bar{X} = -\frac{\mu_2}{\mu_1} X$ (*)

$$A\bar{A}X = \lambda X$$

(*) $\Leftrightarrow \bar{A}X = -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \bar{X}$ donc $\underbrace{A\bar{A}X}_{\lambda X} = -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) A\bar{X}$

$$\lambda X = -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) A\bar{X} = -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) X = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 X \text{ donc } \lambda = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 > 0$$

ou $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$