exo 385 (William)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$

a) $(f - \alpha I_d) \circ (f - \beta I_d) = 0$

$P = (X - \alpha)(X - \beta)$ SARS annule f. f diagonalisable

$\Rightarrow E_\alpha(f) \oplus E_\beta(f) = E$

b)

(E) $y'' + ay' + by = 0$

$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ y \longmapsto y' \end{cases}$$

Donc pour $y \in S_{(E)}$, $f^2(y) + a(y) + \beta(y) = 0$

$f_{|S_E}$ vérifie $f^2 + af + bI_d = 0$

On note α, β les racines de $P = X^2 + aX + b$

- $\alpha \neq \beta$

$f_{|S_E}$ diago, $\mathrm{Ker}(f_{|S_E} - \alpha I_d) \oplus \mathrm{Ker}(f_{|S_E} - \beta I_{d_E}) = S_E$

Donc : Soit $y \in S_E$, $y = y_1 + y_2$ où $\begin{cases} y_1' = \alpha y \\ y_2' = \beta y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 \in \mathrm{Vect}(x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha x}) \\ y_2 \in \mathrm{Vect}(x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\beta x}) \end{cases}$

donc $y \in \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\alpha x}, x \mapsto e^{\beta x})$

c) $S : u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Si $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ (E)

$(a, b) \neq (0, 0)$

$S_E = \mathrm{Ker}(S(u) - \alpha I_d) \oplus \mathrm{Ker}(S(u) - \beta I_d)$

$y \in S_E \Leftrightarrow y \in \mathrm{Vect}((\alpha^n)_n, (\beta^n)_n)$.