

exa 383 (Raphaël Berg)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tq $P(A)$ soit nilpotent.

$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ tq $A = QTQ^{-1}$
ou $P(A) = QP(T)Q^{-1}$.

Or $P(A)$ est nilpotent donc $(P(T))^n = 0$

On a : diagonale de $T = D = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$.

diagonale de $P(T)$: $(P(t_1), \dots, P(t_n))$

— de $P(T)^n$: $(P(t_1)^n, \dots, P(t_n)^n) = (0, \dots, 0)$

Donc $\forall i \in [1, n]$, $P(t_i) = 0$. Donc $(X - t_i) \mid P$.

Réciproque vraie.

exa 381 (Raphaël Berg)

a) Soit $x \in E$. On suppose qu'il n'existe pas de $i, j \in \mathbb{N}^+$ tq
avec $i \neq j$

$\mu^i(x) = \mu^j(x)$.

On cela veut dire que l'application $\varphi: \begin{cases} \mathbb{N}^+ \rightarrow E \\ n \mapsto \mu^n(x) \end{cases}$
est injective, ce qui est absurde.

Donc on dispose de $i, j \in \mathbb{N}^+$ tq $i > j$ tq $\mu^i(x) = \mu^j(x)$.

Donc $\mu(\mu^{i-j}(x)) = \mu(\mu^{i-1}(x))$. Par injectivité $\mu^{i-j}(x) = \mu^{i-1}(x)$.

On itère et on obtient : $\mu^{i-j}(x) = x$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . $\forall i \in [1, n]$, on dispose de $m_i \in \mathbb{N}^+$
tq $\mu^{m_i}(e_i) = e_i$.

On $\forall i \in \mathbb{N}$ $\mu^{m_i}(e_i) = e_i$.

On pose $N = \text{PP}(m_1, \dots, m_n)$, $\forall i \in [1, n]$ $\mu^N(e_i) = e_i$.

Donc $\mu^N = \text{id}$

2) On a $a^n =$

$$P = X^n - 1$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

. Donc μ est annulé par un P SARRS
donc μ diagonalisable