

exo 380 (Arthur)

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix}$ $\chi_A(X) = X(X-1)$
 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A, B \in D$. Mais $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11}+b_1 & & \\ & X & \\ 0 & & m_{nn}+b_n \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} -b_1 & & \\ & X & \\ & & -b_n \end{pmatrix}}_B$$

On prend b_i tq $(m_{11}+b_1, \dots, m_{nn}+b_n)$ 2 à 2 distincts
et $(b_1, \dots, b_n)$ 2 à 2 distincts.

χ_A et χ_B scindent à racines simples donc A et B diagonalisables.

c) $T_n^{++}(R)$ les matrices triang sup strict

$$T_n^{++}(R) \cap V = \{0\}$$

$$\dim(\underbrace{T_n^{++}(R) + V}_{\substack{\subset M_n(R) \\ \leq n^2}}) = \dim V + \underbrace{\dim T_n^{++}(R)}_{= \frac{n(n-1)}{2}} - \underbrace{\dim(T_n^{++}(R) \cap V)}_{= 0}$$

$$\boxed{\dim(V) \leq \frac{n(n+1)}{2}}$$