

ex 379 (William)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists A \in M_n(\mathbb{Z}), A^2 - A + I_n = 0$$

• $P = X^2 - X + 1$ est annulateur de A

$$= (X - \omega)(X - \bar{\omega}) \quad \omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

• $n=1$, NON

• $n=2$ P est SARRS et $\text{sp}(A) \subset \{\omega, \bar{\omega}\}$

$$A \text{ semblable à } \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{\omega} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \text{ ou } \boxed{\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}}$$

$$\chi_A(A) = 1 = \det(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• n pair, $n=2p$, $p \in \mathbb{N}$.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = (X - \omega)^p (X - \bar{\omega})^p, \chi_A = P(X)^p \text{ et par Cayley-Hamilton } P(A)^p = 0$$

• Si n impair:

$$\text{Comme } A \text{ semblable à } \begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \bar{\omega} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\omega} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \omega & & 0 \\ & \omega & \\ 0 & & \omega \end{pmatrix}$$

$$\ln(\omega) = \ln(\bar{\omega})$$

$$n = 2\ln(\omega) \Rightarrow n \text{ est forcément pair.}$$

• Autre manière de montrer que n est pair (par M. Fagelboms)

$$P = X^2 - X + 1 \text{ annulateur de } A$$

$$\Rightarrow \text{sp}(A) \subset \{-j, -j^2\}$$

Si n impair $\deg \chi_A = n \Rightarrow$ une racine réelle (TVI) impossible