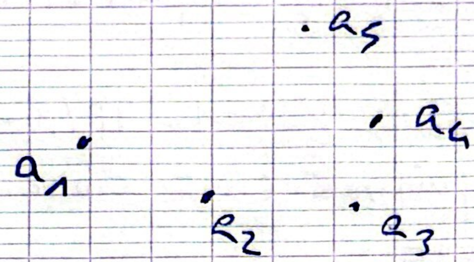
$$P(M) = P^{-1}\begin{pmatrix} P(\omega^0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix} P$$

donc $\boxed{\det M = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)}$

Exercice 375 : William + M. Fagebaum + Diane

Soient $a_1, \dots, a_n$ des points du plan



Soit $M_1, \dots, M_n$ un n-gone tq
$\forall i \in [\![1,n]\!], \ \overrightarrow{M_iM_{i+1}} = 2\overrightarrow{M_ia_i}$

Notons (x_i, y_i) les coordonnées de a_i
et (m_i, p_i) celles de M_i.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\begin{cases} m_{i+1} - m_i = 2(x_i - m_i) \\ p_{i+1} - p_i = 2(y_i - p_i) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{2}(m_i + m_{i+1}) \\ y_i = \frac{1}{2}(p_i + p_{i+1}) \end{cases}$$

$$a_i = \frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})$$

$$\left|\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \\ \vdots \\ a_n = \frac{1}{2}(z_n + z_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = z_1 + z_2 \\ \vdots \\ 2a_n = z_1 + z_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 \end{bmatrix}}_{= A_n} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 \\ \vdots \\ 2a_n \end{bmatrix}$$

$A_n = I_n + H$ (cf 352)

donc $\det A_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + w_k)$ (cf 352 avec $P(X) = X+1$)

$= (-1)^n \prod (-1 - w_k)$

$= (-1)^n \times (-1 + (-1)^n)$

car $X^n - 1 = \prod (X - w_k)$

- Si n impair, il existe donc un unique polygone
- Si n pair :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} + z_{n-1} = 2a_{n-1} \\ z_1 + z_n = 2a_n \end{cases}$$

$L_n \leftarrow L_1 - L_2 + \dots + (-1)^{n-1} L_{n-1}$:

$z_1 + z_2 = 2a_1$

$\vdots$

$z_{n+1} + z_n = 2a_{n-1}$

$(-1)^n z_n + z_n = 2(a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1})$

Si n pair : $0 = a_1 - a_2 + \dots - a_{n-1} + a_n$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \end{cases}$$

$(n-1)$ équations, n inconnues
donc il y a une infinité de solutions

Exercice 332 : Augustin

Analyse : soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(C+M) = \det(M)$

Soit $r = rg(C)$.

$\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $C = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{J_r} Q$

En particulier, $M = PQ$

$\det\left(P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q + PQ\right) = \det PQ$

$\det(PQ) \det \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \det PQ$

$\det \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = 1$

Donc $2^r = 1$ d'où $r = 0$, $C = 0_n$

Synthèse : ...