

b) Soient A, B telles que

$$\forall M, \det(A+M) = \det(B+M)$$

$$\text{Donc } \forall M, \det(A+(-A+M)) = \det(B+(-A+M))$$

$$\forall M, \det(M) = \det(B-A+M)$$

$$\text{donc } B-A = O_n \text{ d'après a)}$$

c) Analyse: Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$

$$\forall M, \det(A+M) = \det A + \det M$$

$$\text{Si } A \notin \text{GL}_n(\mathbb{R}), \det A = 0$$

d'après a), $A = 0$

Si $n=1$, toutes les matrices commutent

$$\text{Si non, } A = (A_1 | \dots | A_n)$$

$$B = (-A_1 | -A_2 | \dots | A_n)$$

$$\det B = (-1)^2 \det A$$

$$\det(A+B) = 2 \det A$$

$$\text{i.e. } \det(1 \ 0 \ 0 \mid 2A_3 \mid \dots \mid 2A_n) = 2 \det A$$

$$\text{i.e. } \det A = 0 \text{ Absurde.}$$

$$\text{Donc } A = 0.$$

Exercice 359: Neam

Par récurrence:

$$\text{Pour } n=1: \det([a] \pm 1) = \underline{a \pm 1}$$

l'une des 2 valeurs
est non nulle

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists D_n \\ A_n + D_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$A_{m+1} \in \mathcal{R}_{m+1} \quad (10)$$

$$A_{m+1} = \left(\begin{array}{c|c} a_{m+1} & L \\ \hline C & A_m \end{array} \right)$$

$$D_{m+1} = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & D_m \end{array} \right)$$

$$\det(A_{m+1} + D_{m+1}) = \left| \begin{array}{c|c} a_m + \varepsilon & L \\ \hline C & A_m + D_m \end{array} \right| = (\varepsilon + a_m) \underbrace{\det(A_m + D_m)}_{\neq 0 \text{ part } m} + \sum_{i=1}^m a_{1,i} M_i$$

Exercice 336 :

a) On note d la dimension maximale des ser de $M_n(\mathbb{C})$ tq $\forall M \in F, \det M = 0 \Leftrightarrow M = O_n$

Sei F ein KVL s.d. $(A, B) \in F^2$

$$\forall t \in \mathbb{C}, \text{Polynoms } P(t) = \det(A + tB).$$

Par d'Alembert - Gauss, il existe $\lambda \in \mathbb{C}, P(\lambda) = 0$

donc comme $A + \lambda B \in F$, $A + \lambda B = 0_M$

d'où (A, B) liée

$A_{\text{mai}}, d=1$

b) Dans $M_2(\mathbb{R})$, $d=2$: $\underline{:= A}$

- Posons $F = \text{Vect}(I_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$

Sei $(2, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Theta_m \cdot a \cdot 2I_2 + \mu A = \begin{pmatrix} 1+\mu & 0 \\ 0 & 1-\mu \end{pmatrix} \in F$$

donc $\lambda I_2 + \mu A \notin GL_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2I_2 + \mu A = 0$$