

$$A_{m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$$

$$A_{m+1} = \left(\begin{array}{c|c} a_{m+1} & L \\ \hline C & A_m \end{array} \right)$$

$$D_{m+1} = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & 0 \\ \hline 0 & D_m \end{array} \right)$$

$$\det(A_{m+1} + D_{m+1}) = \left| \begin{array}{c|c} a_m + \varepsilon & L \\ \hline C & A_m + D_m \end{array} \right| = (\varepsilon + a_m) \underbrace{\det(A_m + D_m)}_{\neq 0 \text{ par thm}} + \sum_{i=1}^m a_{1,i} M_i$$

Exercice 336 :

- a) On note d la dimension maximale des ser de $M_n(\mathbb{C})$ tq
 $\forall M \in F, \det M = 0 \Leftrightarrow M = O_n$

Soit F un tel ser, $(A, B) \in F^2$

$\forall t \in \mathbb{C}$, posons $P(t) = \det(A + tB)$.

Par d'Alembert-Goursat, il existe $\lambda \in \mathbb{C}, P(\lambda) = 0$

donc comme $A + \lambda B \in F$, $A + \lambda B = O_n$

d'où (A, B) liée

Ainsi, $d = 1$

- b) Dans $M_2(\mathbb{R}), d = 2$: $\begin{matrix} := A \\ \cdot \text{Posons } F = \text{Vect} \left(I_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{matrix}$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\lambda I_2 + \mu A = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 \\ 0 & \lambda - \mu \end{pmatrix} \in F$

donc $\lambda I_2 + \mu A \notin GL_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda I_2 + \mu A = 0$

et $\dim F = 2$

donc $d \geq 2$

- Montrons que $d = 2$ par l'absurde :

Supposons qu'il existe (A, B, C) famille libre de F .

Trouvons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $A + \lambda B + \mu C \notin GL_2(\mathbb{R})$:

$$\text{On a } \det(A + \lambda B + \mu C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(I_n + \lambda BA^{-1} + \mu CA^{-1}) = 0 \quad \leftarrow \times \frac{1}{\det A}$$

$$\text{Posons } B' = BA^{-1} = \begin{pmatrix} a & * \\ b & * \end{pmatrix}, \quad C' = CA^{-1} = \begin{pmatrix} c & * \\ d & * \end{pmatrix}$$

Cas 1: $b = 0$ ou $d = 0$.

Pfci: $b = 0$.

$BA^{-1} \in GL_2(\mathbb{R})$ donc $a \neq 0$.

$$\text{On a } aI_2 - B' = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R})$$

$$\times \dots A \quad \rightarrow \quad aA - B \notin GL_2(\mathbb{R})$$

et $(a, -1) \neq (0, 0)$ donc $aA - B = 0$
d'où $B = aA$

Absurde car (A, B) libre

Cas 2: $b \neq 0$ et $d \neq 0$

$$\text{On a } dB' - bC' = \begin{pmatrix} da - bc & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Si $da - bc = 0$, $dB' - bC' \notin GL_2(\mathbb{R})$
donc $dB - bC \notin GL_2(\mathbb{R})$
donc $dB = bC$

Absurde car (B, C) libre et $(d, b) \neq (0, 0)$

Ainsi, $\alpha := da - bc \neq 0$

Donc $\alpha I_2 - (dB' - bC') = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R})$

donc $\alpha A - dB + bC \notin GL_2(\mathbb{R})$

donc $\alpha A - dB + bC = 0$

Abonde car (A, B, C) d'ue et $(\alpha, -d, b) \neq (0, 0, 0)$

d'où $d = 2$

Exercice 368 : Envariste

$$\begin{cases} \forall m \in \mathbb{N}, A_{m+1} = 2A_m - A_m^2 \\ A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\chi_{A_0} = \det(XI_2 - A_0) = \frac{1}{16} (X^2 - 8X + 14)$$

$$\chi_{A_0} = \frac{1}{16} (X - 4 - \sqrt{5})(X - 4 + \sqrt{5})$$

$$\text{Sp } A_0 = \left\{ 1 + \frac{\sqrt{5}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{4} \right\}$$

Trigonalisation: $A_m \forall m \in \mathbb{N}$

On cherche $(x_m)_m, (y_m)_m$

$$\text{tg } \begin{cases} \forall m \in \mathbb{N}, A_m = P \begin{pmatrix} x_m & * \\ 0 & y_m \end{pmatrix} P^{-1} \\ \exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \end{cases}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{m+1} = 2x_m - x_m^2 \\ y_{m+1} = 2y_m - y_m^2 \end{cases}$$

Perems: $\forall m \in \mathbb{N} \begin{cases} x_m = 1 - x_m \\ y_m = 1 - y_m \end{cases}$