

Si n pair : $0 = a_1 - a_2 + \dots - a_{n-1} + a_n$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1}$$

$(n-1)$ équations, n inconnues
donc il y a une infinité de solutions

Exercice 332: Augustin

Analyse: soit $C \in M_n(\mathbb{R})$

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \det(C+M) = \det(M)$$

Soit $r = \text{rang}(C)$.

$$\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R}), C = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{I_r} Q$$

En particulier, $M = PQ$

$$\det(P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_I Q + PQ) = \det PQ$$

$$\det(PQ) \det \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det PQ$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Donc $2^r = 1$ d'où $r = 0$, $C = O_n$

Synthèse: ...

b) Soient A, B telles que

$$\forall M, \det(A+M) = \det(B+M)$$

$$\text{Donc } \forall M, \det(A+(-A+M)) = \det(B+(-A+M))$$

$$\forall M, \det(M) = \det(B-A+M)$$

$$\text{donc } B-A = O_n \text{ d'après a)}$$

c) Analyse: Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$

$$\forall M, \det(A+M) = \det A + \det M$$

$$\text{Si } A \notin \text{GL}_n(\mathbb{R}), \det A = 0$$

$$\text{d'après a), } A = 0$$

Si $n = 1$, toutes les matrices commutent

$$\text{Si non, } A = (A_1 | \dots | A_n)$$

$$B = (-A_1 | -A_2 | \dots | A_n)$$

$$\det B = (-1)^2 \det A$$

$$\det(A+B) = 2 \det A$$

$$\text{i.e. } \det(1 \ 0 \ 0 \mid 2A_2 \mid \dots \mid 2A_n) = 2 \det A$$

$$\text{i.e. } \det A = 2 \text{ Absurde.}$$

$$\text{Donc } A = 0.$$

Exercice 359: Neam

Par récurrence:

$$\text{Pour } n=1: \det([a] \pm 1) = \underline{a \pm 1}$$

l'une des 2 valeurs
est non nulle

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall A_n \in M_n(\mathbb{R}), \exists D_n$$

$$A_n + D_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$