

Caro
M. F. A. EBAUME
204

Réponse : $u \in E \setminus \{0_E\}$

Soit $u \neq 0_E$, (u) est libre. Donc par T.B.I.

$\hookrightarrow (0, e_2, \dots, e_n)$ base de E .

On pose $e_1 = u - (e_2 + \dots + e_n) \Rightarrow u = e_1 + \dots + e_n$.

⊗ $M_q \cdot (u - (e_2 + \dots + e_n), e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ $\lambda_1 (u - (e_2 + \dots + e_n)) + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 u + (\lambda_2 - \lambda_1) e_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) e_n = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow OK$$

Si $u = 0_E = e_1 + \dots + e_n$: RDLNT $\Rightarrow$ famille liée : contradiction.

(253)
(Ulysse)

Soit $u \in \mathcal{U}(E)$

Analyse On suppose que $u = f - g$ où $f, g \in \mathcal{G-L}(E)$.

Soit $x \in \text{Ker}(u)$: $u(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Soit $S \subset \mathcal{G} \oplus \text{Ker } u = \underline{E}$.

Soit $P \subset \mathcal{G} \oplus \text{Im } u = E$.

Par th. du rang, $\underset{1_S}{u}|_{\text{Im } u} : S \rightarrow \text{Im}(u)$ isomorphisme

d'où $\dim(\text{Ker } u) = \dim(P)$.

Pour $x \in S$, $f(x) = g(x)$
 $g(x) = a(x)$

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ base de P , $(e_1, \dots, e_p)$ base de $\text{Ker } u$.

On définit f et g sur $\text{Ker}(u)$ par
 $\forall i \in \{1, \dots, p\}, f(e_i) = u_i = g(e_i)$

Soit $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(e_i) = g(x)$

$\text{Im}(f|_{\text{Ker}(u)}) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = P$.

$\text{Im}(P|_S) = \text{Im}(u)$. donc $\text{Im}(f) = P \oplus \text{Im}(u) = E$.

Autre méthode M. FAGEBAUME.

$A \in M_n(K)$.

$\exists (B, C) \in GL_n(K)^2, A = B - C$

$\text{rg } A = r \Leftrightarrow A = P J_r Q$ avec $P, Q \in GL_n(K)$.

$$J_r = (J_r + I_m) - I_m$$

$$A = \underbrace{P(J_r + I_m)}_B \underbrace{Q}_{C} - PQ$$

(203) $\text{rg } E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$.

[$\Rightarrow$] On sait déjà que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

Soit $x, y \in \text{Im } f$.

On dispose de $x \in E$ tq $x = x_{\text{Ker } f} + x_{\text{Im } f}$ tq.

$$y = f(x) = f(x_{\text{Im } f})$$

On $\exists x, y \in E$, $x_{\text{Im } f} = f(y)$. Donc $y \in \text{Im } f^2$