

7

(Ulysse)

(2.14) Soit $\phi: P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$

(a) $(\phi - \text{Id})(P) = P(X+1) - P(X) \leq \deg P$

Par récurrence, $\forall h \in \mathbb{N}, \deg((\phi - \text{Id})^h(P)) \leq \deg P - h$

Donc $(\phi - \text{Id})^{n+1} = 0$ ie $\phi - \text{Id}$ est nilpotent d'indice $n+1$

(b) On veut que $\forall h, \phi^h(P)(X) = P(X+h)$

~~⊗ Libéité de $(P, \phi(P), \dots, \phi^n(P))$~~

~~Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq: $\lambda_0 P + \dots + \lambda_n \phi^n(P) = 0$~~

$$B = \begin{pmatrix} P_n & P_{n+1} & \dots & P_0 \end{pmatrix}$$

$\swarrow$
 P

$\downarrow$
 $\phi(P) - P$

$\swarrow$
 $(\phi - \text{Id})^n(P)$

B est échelonnée en degré donc libre

$$\forall h \in \mathbb{N}, (\phi - \text{Id})^h(P) = \sum_{l=0}^h \binom{h}{l} (-1)^{h-l} \phi^l(P)$$

On pose $B' = (P, \phi(P), \dots, \phi^n(P))$ qui est donc génératrice de $\text{Vect}(P_n, \dots, P_0) = \mathbb{R}_n[X]$

On a une famille de bon cardinal.

Donc B' est base de $\mathbb{R}_n[X]$.

③ Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq p$. Calculer $\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^h h^p$

On pose $P(X) = X^p$

Alors $\phi^h(P)(X) = P(X+h) = (X+h)^p$
donc $\phi^h(P)(0) = h^p$

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^h \phi^h(P)(0) = (-1)^n \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^{n-h} \phi^h(P)(0)$$

On pose $S_{n,p} = (\phi - \text{Id})^n(P)(0)$

Cas 1 : si $n > p$: $(\phi - \text{Id})^n(P) = 0$
ie $S_{n,p} = 0$

Cas 2 : si $n = p$

$$\begin{aligned} \text{On a } P(X+1) - P(X) &= (X+1)^p - X^p \\ &= X^p + pX^{p-1} + q(X) - X^p \\ &= pX^{p-1} + q(X). \end{aligned}$$

Donc $S_{n,p} = p!$

Exo

supplémentaire

(Augustin)

Soit E un K -ev de dim° finie. F, G deux sev de E tq
 $F \oplus G = E$. On pose $(e_1, \dots, e_n)$ base de F
 $(g_1, \dots, g_p)$ base de G .

① Soit $a \in G$.

On mg $(e_1 + a_1, \dots, e_n + a_n, g_1, \dots, g_p)$ base de E .

On a par concaténation de bases $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_p)$ base de E .