

(Nathanaël)

207

Soit E un K -ev de dim^o finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tq
 $\forall u \in \mathcal{L}(E), f \circ u = u \circ f$

- ① Soit $x \in E$, $G \subset E$ tq $G \oplus \text{Vect}(x) = E$
• p_x projecteur sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à G .

$$\text{Comme } p_x \in \mathcal{L}(E) \text{ donc } (f \circ p_x)(x) = (p_x \circ f)(x) \\ \text{ie } f(p_x(x)) = p_x(f(x))$$

Or $x \in \text{Vect}(x)$ donc $p_x(x) = x$ donc

$$f(x) = p_x(f(x))$$

donc $f(x) \in \text{Vect}(x)$ ie $\exists \lambda_x \in K$ tq $f(x) = \lambda_x \cdot x$

- ② Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_i \in K \text{ tq } f(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$$

$$\text{Pour } x = e_1 + \dots + e_n, \exists \lambda \in K \text{ tq } f(e_1 + \dots + e_n) = \lambda x.$$

$$\text{Donc } \sum_{h=1}^n \lambda_h e_h = \sum_{h=1}^n \lambda e_h.$$

$$\text{Donc } \forall h \in \{1, \dots, n\}, \lambda_h = \lambda \text{ ie } f = \lambda \text{ Id.}$$

- ③ Soit $x \in E$.

$$G \subset E \text{ tq } G \oplus \text{Vect}(x) = E$$

• σ_x symétrique sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à G .

$$\sigma_x(f(x)) = f(\sigma_x(x))$$

$$\text{Or } \sigma_x(x) = x \text{ ie } \sigma_x(f(x)) = f(x).$$

Donc $f(x) \in \text{Vect}(x)$.

Donc f est une homothétie.