

(2)

Réciproquement, les homothéties commutent avec les symétries.

(206)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x \in E, (f(x), x)$ est liée.

(Martin)

$\forall x \in E, \exists \lambda_x \in K, f(x) = \lambda_x x.$

Soit $y \in E, f(y) = \lambda_y y.$

$$\begin{aligned} \text{Si } (x, y) \text{ est liée } f(x+y) &= \lambda_{x+y} \cdot x + \lambda_{x+y} \cdot y \\ &= f(x) + f(y) \\ &= \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y). \end{aligned}$$

Alors $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y} \Rightarrow \lambda$ est unique.

Si (x, y) est liée. $x = py$

$$f(x) = \lambda_x py \quad \rightarrow \quad \lambda_x = \lambda_y.$$

$$p f(y) = \lambda_y py$$

(204)

(Nathanaël)

On cherche $u \in E$ tq $\exists (e_1, \dots, e_n)$ tq $u = e_1 + \dots + e_n.$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de $E.$

$$\text{Soit } x \in E, x = \sum_{h=1}^n \lambda_h e_h$$

- Si $\lambda_h \neq 0 \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}$, on pose $f_i = \lambda_i e_i$ et $(f_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

- Si $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ tq $\lambda_i = 0$, sans perte de généralité; $i = n.$

$$x = \sum_{h=1}^{n-1} \lambda_h e_h$$

$$\text{On pose } (f_1, \dots, f_n) = (\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n).$$

$$\text{On a } x = \sum f_i.$$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tq $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0_E$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_{n-1} e_{n-1} + (\lambda_1 \lambda_1 - \lambda_n) e_n = 0.$$

$\forall i \in \{1, n-1\}$, $\lambda_i \neq 0$, alors $\lambda_i = 0$ donc $\lambda_n = 0$ et les f_i sont libres donc c'est une base.

$\therefore \forall i \geq 2, \lambda_i = 0.$

On pose
$$\begin{cases} f_1 = \lambda_1 e_1 - e_2 - \dots - e_n \\ f_2 = e_2 - e_3 - \dots - e_n \\ f_3 = 2e_3 - e_4 - \dots - e_n \\ \vdots \\ f_n = (n-1)e_n. \end{cases}$$

Donc $\sum f_i = \lambda_1 e_1 + 0 + \dots + 0 = x$

Soit $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tq $\sum \beta_i f_i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 \lambda_1 = 0 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ -\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 = 0 \\ \vdots \\ -\beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n-1} + (n-1)\beta_n = 0 \end{cases} \text{ par liberté}$$

Donc $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = 0$ etc...

Et $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Caro
M. F. A. EBAUME
204

Réponse : $u \in E \setminus \{0_E\}$

Soit $u \neq 0_E$, (u) est libre. Donc par T.B.I.

$\hookrightarrow (0, e_2, \dots, e_n)$ base de E .

On pose $e_1 = u - (e_2 + \dots + e_n) \Rightarrow u = e_1 + \dots + e_n$.

⊗ $M_q \cdot (u - (e_2 + \dots + e_n), e_2, \dots, e_n)$ est une base de E .

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ $\lambda_1 (u - (e_2 + \dots + e_n)) + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 u + (\lambda_2 - \lambda_1) e_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) e_n = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow OK$$

Si $u = 0_E = e_1 + \dots + e_n$: RDLNT $\Rightarrow$ famille liée : contradiction.

(253)
(ulyse)

Soit $u \in \mathcal{U}(E)$

Analyse On suppose que $u = f - g$ où $f, g \in \mathcal{G}\mathcal{L}(E)$.

Soit $x \in \text{Ker}(u)$: $u(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Soit $S \subseteq \mathcal{G} \oplus \text{Ker } u = \underline{E}$.

Soit $P \subseteq \mathcal{G} \oplus \text{Im } u = E$.

Par th. du rang, $\underset{1_S}{u}|_{\text{Im } u} : S \rightarrow \text{Im}(u)$ isomorphisme

donc $\dim(\text{Ker } u) = \dim(P)$.

Pour $x \in S$, $f(x) = g(x)$
 $g(x) = u(x)$