

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ base de P , $(e_1, \dots, e_p)$ base de $\text{Ker } u$.

On définit f et g sur $\text{Ker}(u)$ par
 $\forall i \in \{1, \dots, p\}, f(e_i) = u_i = g(e_i)$

Soit $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(e_i) = g(x)$

$\text{Im}(f|_{\text{Ker}(u)}) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = P$.

$\text{Im}(P|_S) = \text{Im}(u)$. donc $\text{Im}(f) = P \oplus \text{Im}(u) = E$.

Autre méthode M. FAGEBAUME.

$A \in M_n(K)$.

$\exists (B, C) \in GL_n(K)^2, A = B - C$

$\text{rg } A = r \Leftrightarrow A = P J_r Q$ avec $P, Q \in GL_n(K)$.

$$J_r = (J_r + I_m) - I_m$$

$$A = \underbrace{P(J_r + I_m)}_B Q - \underbrace{PQ}_C$$

(203) $\text{rg } E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{Im } f = \text{Im } f^2$.

[$\Rightarrow$] On sait déjà que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

Soit $x, y \in \text{Im } f$.

On dispose de $x \in E$ tq $x = x_{\text{Ker } f} + x_{\text{Im } f}$ tq.

$$y = f(x) = f(x_{\text{Im } f})$$

On $\exists x, y \in E, x_{\text{Im } f} = f(y)$.

Donc $y \in \text{Im } f^2$

3

$$\boxed{\Leftarrow} \text{ Seien } x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$$

$$f(x) = f^2(x) = 0$$

$$x \in \text{Ker } f^2$$

$$x \in \text{Ker } f \Rightarrow \overline{[x = 0_E]}$$

$$\text{Dann } \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$$

$$\text{Or } \dim \text{Ker } f + \text{rg } f = \dim \text{Ker } f^2 + \text{rg } f^2$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$$

$$\text{Or } \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$$

$$\boxed{\text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E}$$

(279)
(Martin)

$$f^2 + f = 0 \Rightarrow \begin{cases} (f^2 + \text{id}) \circ f = 0 \\ f \circ (f^2 + \text{id}) = 0 \end{cases}$$

① Analyse Seien $x \in E$.

$$x = x + f^2(x) - f^2(x)$$

$$\text{Synthese} \mid \begin{array}{l} x + f^2(x) \in \text{Ker } f \text{ car } f(x) + f^3(x) = 0 \\ -f^2(x) \in \text{Im } f. \end{array}$$

$$\text{Dann } \text{Im } f \oplus \text{Ker } f = E$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } f \in GL(E) \Rightarrow f^2 + \text{id}_E = 0$$

$$\text{Si } f^2 + \text{id}_E = 0 \mid \begin{array}{l} \text{Ker } f = \{0_E\} \text{ injectif} \\ \{0_E\} \oplus \text{Im } f = E \text{ surjectif} \end{array} \Rightarrow f \in GL(E)$$

$$\textcircled{3} \text{ Seien } \lambda_1, \lambda_2 \in K \text{ tq } \lambda_1 x + \lambda_2 f(x) = 0_E \quad (x \in M)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 f(x) + \lambda_2 x = 0_E \quad (x \in (-\lambda_2))$$

$$\Rightarrow (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) x = 0_E$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \text{ Donc } (x, f(x)) \text{ s.c. lin.}$$

Von terminé