

" $\Rightarrow$ ": on suppose $a_0 \neq 0$

unicité: Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ tq

$$Q = \sum_{k=0}^n a_k p_1^{(k)} = \sum_{k=0}^n a_k p_2^{(k)}$$

on note $d = \deg(Q)$

on a $\deg(P_1) = \deg(P_2) = d$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k (P_1 - P_2)^{(k)} = 0$$

$$P_1 - P_2 = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_d X^d$$

le seul terme en X^d dans la somme est donc $a_d (P_1 - P_2)$

par identification: $a_d \alpha_d = 0$ or $a_d \neq 0$ donc $\alpha_d = 0$

$$P_1 - P_2 = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1}$$

en itérant, on obtient $\alpha_0 = \dots = \alpha_{d-1} = \alpha_d = 0$

donc $P_1 - P_2 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$ d'où l'unicité

existence: Notons $Q = q_0 + \dots + q_d X^d$

$$\text{on pose } p_d = \frac{q_d}{a_0}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k (p_d X^d)^{(k)} = a_0 p_d X^d + d a_1 p_d X^{d-1} + \dots$$

$$\text{posons } p_{d-1} \text{ tq } q_{d-1} = d a_1 p_d + a_0 p_{d-1}$$

p_{d-1} existe car $a_0 \neq 0$

on peut ainsi construire $(p_1, \dots, p_d)$ tq

$$P = p_0 + p_1 X + \dots + p_d X^d \text{ qui vérifie l'égalité}$$

d'où l'existence.

correction de Faugetbaum:

$$\mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$a_0 \neq 0 \Rightarrow \forall Q, \exists! P \text{ tq } Q = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{(k)}$$

$$\Rightarrow \varphi: \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ p & \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^{(k)} \end{cases} \text{ est bijective}$$

φ est linéaire: $\text{Ker } \varphi$ est un automorphisme:

$\Leftrightarrow$ $\text{Im } \varphi$ l'image d'une base de $\mathbb{R}[X]$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

$$\text{or } \mathbb{R}[X] = \{ X^n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$\varphi(X^n) = \sum_{k=0}^n a_k (X^n)^{(k)}$$

$$= a_0 X^n + a_1 n X^{n-1} + \dots + a_n n!$$

c'est un polynôme de degré n

$\{ \varphi(X^n), n \in \mathbb{N} \}$ est donc une famille échelonnée en degré
= base de $\mathbb{R}[X]$

CC: φ est ^{un} automorphisme

Exercice 183:

Pour $n \in \mathbb{N}^+$, $\varphi(n)$: nb d'entiers de $\{1, n\}$ qui sont premiers avec n
on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n

$$\text{Rq } \sqrt{\varphi(n)\sigma(n)} \leq n \leq \frac{\varphi(n) + \sigma(n)}{2}$$

on écrit $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$ (décomposition en facteurs premiers de n)

$$\text{on a } \varphi(p_i) = p_i - 1$$

$$\varphi(p_i^{\alpha_i}) = (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$$

$$\Rightarrow \varphi(n) = \prod (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1}$$

de plus:

$$\sigma(p) = p + 1$$

$$\sigma(p_i^{\alpha_i}) = \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j = \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Correction de Faussebaume:

1^{er} cas: n premier ($n \in \mathcal{P}$)

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(n) = n-1 \\ \sigma(n) = 1+n \end{array} \right\} \sqrt{\varphi(n)\sigma(n)} = \sqrt{n^2-1} \leq n = \frac{\varphi(n) + \sigma(n)}{2}$$

2^e cas: $n = p^k$ $p \in \mathcal{P}$

$$\varphi(n) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$$

$$= \text{card}(\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{a p, a \in \{1, \dots, p^{k-1}\}\})$$

$$\sigma(n) = 1 + p + p^2 + \dots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

$$\varphi(n) \tau(n) = p^{2k} - p^{k-1} \leq p^{2k} \leq n$$

$$\tau(n) + \varphi(n) = 2p^k + p^{k-2} + \dots + 1 \geq 2p^k$$

Generalisation :

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$$

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1}) \varphi(p_2^{k_2})$$

$$= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) (p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1})$$

$$= p_1^{k_1-1} (p_1 - 1) p_2^{k_2-1} (p_2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \tau(n) &= 1 + p_1 + \dots + p_1^{k_1} \\ &\quad + p_2 (1 + \dots + p_1^{k_1}) \\ &\quad + p_2^2 \left(\dots \right) \\ &\quad + p_2^{k_2} \left(\dots \right) \end{aligned}$$

$$= (1 + p_1 + \dots + p_1^{k_1}) (1 + p_2 + \dots + p_2^{k_2})$$

$$= \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}$$

$$\varphi(n) \tau(n) = p_1^{k_1-1} (p_1^{k_1+1} - 1) \times p_2^{k_2-1} (p_2^{k_2+1} - 1)$$

$$\leq p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} = n^2$$

$$\begin{aligned} \varphi(n) + \tau(n) &= 2p_1^{k_1} p_2^{k_2} + \dots \\ &\geq 2n \end{aligned}$$

contd

⊕ On generalise : $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$