

Methode 2 (nummer 148) (Fagebaum)

$$X = P(X) [P(X) - X]$$

$$\Rightarrow P(X) = P_0 P(X) [P(X) - X]$$

$$\Rightarrow P(P(X)) = X [P(X) - X] \quad (\text{kannte})$$

$$\Rightarrow \underline{P(X) - X = P(P(X)) - X.}$$

Exer 181 (Mark)

$$1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \times 5^6$$

$$d \mid 2^6 \quad \text{or} \quad d \mid 5^6$$

$\rightarrow 7$ possibilities

$\rightarrow 7$ possibilities

D'ici 45 divisions.

Exer 154 (Ulysse)

$$\text{Mq } P(n)P''(n) - P'(n)^2 \leq 0$$

$$\left(\frac{P'(n)}{P(n)} \right)' = \frac{P''(n) P(n) - P'(n)^2}{P(n)^2}$$

Just $(n_2, \dots, n_d)$ racines de P , $1 \leq n$, non complexes are multiplicités.

$$P(n_k) = 0 \Rightarrow \underline{P(n_k)P''(n_k) - P'(n_k)^2} \leq 0$$

$$P(X) = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\alpha_i}$$

$$P'(X) = \sum_{i=1}^d \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d (X - a_j)^{\alpha_j} \times \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1}$$

Est croissant décroissant.
D'après le résultat.

2) d'après P. absurde.

$\forall k \in \{1, \dots, d\}$, $\exists c_k \in \mathbb{R}; a_k \in \mathbb{R} \mid P'(c_k) = 0$
(Relle)

$\forall k \in \{1, \dots, d\}$, au moins P de multiplicité $d_k - 1$.

d'après le nb de racines de P' dans $\mathbb{R}$:

$$d-1 = \sum_{k=1}^d (d_k - 1) = \sum_{k=1}^d d_k - d = \deg P' - 1$$

↖ c'est le deg de P'

Or P' s'annule sur $\mathbb{C}$ et racines réelles $\Rightarrow$ P' s'annule sur $\mathbb{R}$.

$$c) P(0) = a_0; P'(0) = a_1; P''(0) = a_2.$$

$$a_0 \times a_2 \leq a_1^2 \Rightarrow a_0 a_2 \leq a_1^2.$$

$$P'(x) P'''(x) \leq (P''(x))^2$$

$$\forall h \in \{0, \dots, n\}, P^{(h)}(x) P^{(h+2)}(x) \leq (P^{(h+1)}(x))^2$$

$$\text{Donc } P^{(h)}(0) P^{(h+2)}(0) \leq (P^{(h+1)}(0))^2.$$

$$Q) P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$P^{(h)}(0) = h! a_h, \text{ d'où } (h-1)! a_{h-1} (h+1)! a_{h+1} \leq (h!)^2 a_h^2$$

$$a_{h-1} a_{h+1} \leq a_h^2.$$