Exercice 148 (Kenan)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P \neq X$.

Mq $P-X \mid P\circ P - X$.

Supposons $(X-\alpha)^k \mid P-X$.

Mq $\boxed{(X-\alpha)^k \mid P\circ P - X}$

On a $P-X = (X-\alpha)^k Q$, d'où $P = (X-\alpha)^k Q + X$.

$P\circ P - X = P((X-\alpha)^k Q + X) - X$

$= ((X-\alpha)^k Q + X - \alpha)^k Q + (X-\alpha)^k Q + X - X$

$= (X-\alpha)^k Q + ((X-\alpha)(1+(X-\alpha)^{k-1} Q))^k$

$= (X-\alpha)^k (Q + (1+(X-\alpha)^{k-1} Q)^k$

donc $(X-\alpha)^k \mid (P\circ P - X)$.

Puis d'après Alembert-Gauss,

$P-X = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{m_k}$.

Puis on applique le lemme pour chaque racine

Méthode 2 (mineure 1 4P) (Fagebaum)

$$X \equiv P(X) \quad [P(X)-X]$$
$$\Rightarrow P(X) \equiv P_0 P(X) \quad [P(X)-X]$$
$$\Rightarrow P(P(X)) \equiv X \quad [P(X)-X] \quad \text{(transitivité)}$$
$$\Rightarrow P(X)-X \mid P(P(X))-X.$$

Exercice 181 (Martin)

$$1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \times 5^6$$

$d \mid 2^k$ ou $d \mid 5^p$

→ 7 possibilités → 7 possibilités

D'où 49 diviseurs.

Exercice 154 (Ulysse)

Mq $P(x)P''(x) - P'(x)^2 \leq 0$

$$\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)' = \frac{P''(x)\,P(x) - P'(x)^2}{P(x)^2}$$

Soit $(x_1, \dots, x_d)$ racines de P, $d \leq n$, non comptées avec multiplicité.

$$P(x_k) = 0 \Rightarrow \underbrace{P(x_k)P''(x_k)}_{=0} - (P')^2(x_k) \leq 0$$

$$P(X) = \prod_{k=1}^{d} (X-a_k)^{\alpha_k}$$

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{d} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} (X-\alpha_j)^{\alpha_j} \times \alpha_k (X-a_k)^{\alpha_k} \right)$$