

Exercice 105 (Nicolas)

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{7 + y_n} \text{ et } y_{n+1} = \sqrt{7 - x_n} \end{cases}$$

a) Récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} 0 \leq x_n \leq 7 \\ 0 \leq y_n \leq 7 \end{cases}$

b) Supposons $\begin{cases} x_n \rightarrow l \in [0, 7] \\ y_n \rightarrow l' \in [0, 7] \end{cases}$

Donc par passage à la limite:

$$\begin{cases} l^2 = l' + 7 & (1) \\ l'^2 = 7 - l & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2): l^2 - l'^2 = l' + l \\ \Leftrightarrow (l - l')(l + l') = l' + l \quad \leftarrow$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n \geq \sqrt{7} \\ y_n \geq 0 \end{cases} \quad \leftarrow$$

Donc $l + l' \geq \sqrt{7} > 0$ par passage à la limite
D'où $l - l' = 1$ par $\leftarrow$

$$\text{D'où } l^2 = 6 + l \quad (1) \\ x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

$$\text{Donc } l \in \{-2; 3\} \Rightarrow \boxed{l = 3} \\ \Rightarrow \boxed{l' = 2}$$

$$|x_{n+1}-3| = |\sqrt{7+y_n}-3| = \frac{|y_n-2|}{\sqrt{7+y_n}+3} \leq \frac{|y_n-2|}{3}$$

$$|y_n-2| = |\sqrt{7-x_{n+1}}-2| = \frac{|3-x_{n+1}|}{\sqrt{7-x_{n+1}}+2} \leq \frac{|x_{n+1}-3|}{2}$$

$$|x_{n+1}-3| \leq \frac{|y_n-2|}{3} \leq \frac{|x_{n+1}-3|}{6}$$

$$\begin{cases} |x_n-3| \leq \frac{|x_{n-1}-3|}{6^n} \rightarrow 0 \\ |x_{2n+1}-3| \leq \frac{|x_{2n}-3|}{6^n} \rightarrow 0 \end{cases}$$

d'où, $x_n \rightarrow 3$.

$k_n \in \mathbb{N}$, $y_{n_k} = \sqrt{7-x_{n_k}}$, d'où $y_n \rightarrow \sqrt{4} = 2$