

## Exercice 82 (William)

a)  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  où  $(a_k)_k \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$

donc  $(A_n)_n$  CV ou  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

Par l'absurde, supposons que  $A_n \rightarrow l \in \mathbb{R}_+^*$

( $l=0$  impossible car  $\exists a_n > 0$ )

$$a_n A_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} l a_n \rightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow a_n \rightarrow \frac{1}{l} > 0$$

Donc  $A_n \rightarrow +\infty$  et  $a_n \rightarrow 0$

b)  $A_{n+1} = a_{n+1} + A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc  $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{a_{n+1}}{A_n} + 1$  où  $a_n \rightarrow 0$   
 $A_n \rightarrow +\infty$

$$\Leftrightarrow A_{n+1} \sim A_n$$

c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} A_{n+1}^2 - A_n^2 &= (A_{n+1} + A_n)(A_{n+1} - A_n) \\ &= 2A_{n+1} o(A_n a_n) \end{aligned}$$

$$\text{or } A_n a_n \rightarrow 1 \quad \text{donc } A_{n+1}^2 - A_n^2 \rightarrow 2$$

d) cf. cours.

La  $\sum 2$  LV et d'après c):

$$2n \sim \sum_{k=0}^n A_{k+1}^2 - A_k^2 \sim A_n^2 \sim \frac{1}{a_n^2}$$

F

Donc  $a_n \sim 1/\sqrt{2n}$

G

e)  $\phi$   $B_n \sim \sqrt{2n}$

$f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2t}}$ , pour  $t \in [k, k+1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} \leq f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

C

F

donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}} \leq \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}}$

donc  $\int_1^n f(t) dt \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}}$

On  $b_n \sim \frac{1}{2n}$  de  $b_n > 0$  APCR, donc par d)

$$B_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} \sim \int_1^n f(t) dt \sim \sqrt{2n}$$

F

Donc  $b_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

C

### Exercice 30 (Diame)

Si  $\exists N \in \mathbb{N}$  tq  $a_n \geq 1$  alors  $a_{n+1} \geq 10^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$