f) $\sin\left(2\pi e^{-1} n!\right) = \sin\left(2\pi v_n + \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + 2\pi R_n\right)$

$$= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\text{CSA}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Riemann}}$$

Σ. CV

Exercice 7 (Simon)

Posons $v_n = \left(\prod_{1}^{n}(a+kb)\right)^{1/n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{1}^{n}(a+kb)\right)\right)$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\ln[a+kb]\right)$$

$$= b\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\ln\left[\frac{a}{b}+k\right]\right]$$

d'où :

$$v_n/(n!)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n}\left[\ln\left(\frac{a}{b}+k\right)-\ln(k)\right]\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\ln(1+a/bk)}.$$

Étudions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\frac{a}{bn}\right)$

$\forall k$, $\ln\left(1+\frac{a}{bk}\right) \geq 0$

et $\ln\left(1+\frac{a}{bk}\right) \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{a}{bk}$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}\ln\left(1+\frac{a}{bn}\right)$ DV

② $$\sum_{1}^{n} \ln\left(1+\frac{a}{bk}\right) \underset{n\infty}{\sim} \sum_{1}^{n} \frac{a}{bk} \sim \frac{a}{b}\ln(n)$$

donc

Exercice 91 (Ulysse)

On a :

$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$e^{1} + e^{j} + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!}$$

Or $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$ $\quad (j^3 = 1)$

Pour $j^n \neq 1$

$\iff n \equiv 0 \; [3]$

$$(j^n)^0 + (j^n)^1 + (j^n)^2 = 3$$

d'où : $$e + e^{j} + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n)!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{e^{1} + e^{j} + e^{j^2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{1} + e^{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \times 2\cos\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right]$$

angle moitié.