

①

TD du mardi09/09/2025N° des exercices traités : 75, 77, 91, 82, 74SériesExercice 75 (Martin)

$$a) \text{ on a : } \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\text{donc } e^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

b) Rappel: formule de Taylor

$$f \in C^{m+1}([a, b], \mathbb{R})$$

$$f(b) = \sum_{k=0}^m \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt$$

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} + \int_0^1 \frac{(-1-t)^{m+1}}{(m+1)!} (-1)^{m+2} e^{-t} dt$$

$$m! e^{-1} = \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} m!}_{= v_m \in \mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1-t)^{m+1}}{m+1} e^{-t} dt}_{R_m}$$

$$\text{avec } |R_m| \leq \frac{1}{m+1} \underbrace{\int_0^1 (1+t)^{m+1} dt}_{\frac{1}{m+2}} \leq \frac{1}{m^2}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad \sin(2\pi e^{-i} n!) &= \sin\left(2\pi v_n + \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + 2\pi R_n\right) \\
 &= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\text{CSA}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Riemann}}
 \end{aligned}$$

Σ CV

Exercice 7 (Siman)

Posons $v_n = \left(\prod_{k=1}^n (a + kb)\right)^{1/n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n (a + kb)\right)\right) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln[a + kb]\right) \\
 &= b \exp\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left[\frac{a}{b} + k\right]\right]
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 v_n / (n!)^{1/n} &= e^{\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n [\ln(\frac{a}{b} + k) - \ln(k)] \right)} \\
 &= e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{a}{bk}\right)}
 \end{aligned}$$

Écrivons $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{a}{bn}\right)$

$$\forall k, \quad \ln\left(1 + \frac{a}{bk}\right) \geq 0$$

$$\text{et} \quad \ln\left(1 + \frac{a}{bk}\right) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a}{bk}$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(1 + \frac{a}{bn}\right) \quad \text{DV}$