Maths TD 02/09 2

Exercice 36 :

$u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$

ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = u_n^2 + u_n \geqslant u_n^2$$
$$= u_{n+1}^2$$

donc $u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow (u_n)$ croissante

donc (u_n) admet une limite par TLM

on suppose $l \in \mathbb{R}$

$l^2 = l^2 + l \Rightarrow l = 0$

absurde

donc $\boxed{u_n \longrightarrow +\infty}$

ⓑ Soit $\beta \in \mathbb{R}$:

$$u_{n+1}^{\beta} = u_n^{\beta}\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)^{\beta/2}$$

$$= u_n^{\beta}\left(1 + \frac{\beta}{2u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right)\right)$$

donc : $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} = \frac{\beta}{2u_n^{1-\beta}} + o\left(\frac{1}{u_n^{1-\beta}}\right)$

pour $\beta = 1$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + o(1)$

$\frac{1}{n}\sum u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{n}{2}}$