

Exercice 32:

$$P_n(X) = \prod_{k=0}^n (X - k)$$

1- Montrer que P_n' possède une unique racine dans $]0, 1[$ notée x_n

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket : P(k) = 0 \Rightarrow n+1 \text{ racines}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : P(k) = 0 = P(k+1)$$

↳ Par Rolle: sur $]k; k+1[: \exists c_k$ tq $P'(c_k) = 0$

donc on dispose de $\{c_k : k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$ (il y en a n)

$$\text{tq } \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket : \begin{cases} P'(c_k) = 0 \\ c_k \in]k; k+1[\end{cases}$$

on a donc trouvé les n racines de P'

et x_0 est le seul dans $]0, 1[$

d'où unicité et existence

2- Étudier la suite des $(x_n)_{n \geq 1}$ (ind: considérer $\frac{P_n'}{P_n}$)

$$\frac{P_n'(X)}{P_n(X)} = \frac{\sum_{k=0}^n \prod_{i=0, i \neq k}^n (X-i)}{\prod_{k=0}^n (X-k)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(X-k)}$$

$$\frac{P_n'(x_n)}{P_n(x_n)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x_n - k)} = 0$$

$$\frac{1}{x_n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_n - k)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_n - k}$$

• Limite x_n ? on pos: $f: t \mapsto \frac{1}{t - x_n}$ sur $[1; +\infty[$

décroissante et positive

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t-x_n} \geq f(k+1)$$

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{t-x_n} \geq \frac{1}{k-x_n} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t-x_n}$$

$$\Rightarrow \int_1^m \frac{dt}{t-x_n} \geq \frac{1}{x_n} \geq \int_2^{m+1} \frac{dt}{t-x_n}$$

$$\left[\ln(t-x_n) \right]_0^m \geq \frac{1}{x_n} \geq \left[\ln(t-x_n) \right]_1^{m+1}$$

$$\ln(m-x_n) - \ln(x_n) \geq \frac{1}{x_n} \geq \ln(m+1-x_n) - \ln(1-x_n)$$

$$\underbrace{\ln\left(\frac{m}{x_n} - 1\right)}_{\rightarrow +\infty} \geq \frac{1}{x_n} \geq \underbrace{\ln\left(\frac{m}{1-x_n} + 1\right)}_{\rightarrow +\infty}$$

$$\text{donc } \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$$

$$\text{d'où } x_n \rightarrow 0$$

$\sim x_n$?

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k-x_n}$$

$$k-x_n \sim k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k-x_n} \sim \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k-x_n}$$

$$\sim \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \sim \ln(m)$$

$$x_n \sim \frac{1}{\ln(m)}$$

on peut sommer les $\sim$ car de m^{ème} nature