

TD du mardi

09/09/2025

Exercices corrigés suites: 31, 10, 69, 58, 56

Exercice 31 (Raphaël)

$$x_0 \in \mathbb{R} \text{ et } x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}, \forall n$$

⊙ Equivalence de $(x_n)_n$

$$\forall n, x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} > 0 \quad (x_n) \nearrow$$

TLM on suppose que $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$\text{de } l + e^{-l} = l \text{ ABSURDE}$$

Donc $x_n \rightarrow +\infty$

Soit $(a_n)_n$ tq $\forall n, a_n = e^{x_n} \quad (a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= e^{x_{n+1}} = e^{x_n + a_n} = a_n e^{1/a_n} \\ &= a_n \left(1 + \frac{1}{a_n} + o\left(\frac{1}{a_n}\right) \right) \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 + o(1)$$

Donc par lemme de l'escalier : $a_n \sim n$

$$\Leftrightarrow x_n \sim \ln(n)$$