

Exercice 24

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On suppose $\cos(nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Montrons que $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

On fait une formule d'addition.

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos(x)$$

$$- \sin(nx)\sin(x).$$

Et:

$$(*) \quad \sin(x)\sin(nx) = \underbrace{\cos(nx)\cos(x)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} - \underbrace{\cos((n+1)x)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

→ Si on a $\sin(x) \neq 0$, on a:

$\exists p \in \mathbb{R} : \sin(nx) \rightarrow p$

→ Par l'absurde, si $\sin(x) \neq 0$,
on dispose de $p \in \mathbb{R}$:

$$\sin(nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p.$$

On fait une formule d'addition
pour $(\sin nx)$ également,
aboutir au système :

$$\forall n, \begin{cases} \cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) \\ \sin((n+1)x) = \sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x) \end{cases}$$

Par passage à la limite :

$$\begin{cases} 1 = \cos(x) - l \sin(x) \\ l = l \cos(x) + \sin(x) \end{cases}$$

$$\text{ic } \begin{cases} l = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} \\ l = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \sin(x) \neq 0 \\ \text{donc } 1 - \cos(x) \neq 0 \end{array} \right)$$

et donc $\sin^2(x) = -(1 - \cos(x))^2$,

ce qui est absurde

→ Pour $\sin(x) < 0$,

Donc $x \in \pi \mathbb{Z}$, ce n'est pas suffisant.

On utilise (*); et $0 = \cos(x) - 1$

Donc $x \in 2\pi \mathbb{Z}$.