

exercice 16

Soit $(u_n)_n \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l.$$

a. Montrer que : $l = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n}$

Soit $(u_n)_n$ telle que :

$$\forall n, \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

→ car on a $l \neq 0$,

$$\text{on a } v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(l).$$

Par théorème de Cesàro :

$$\frac{1}{n} \left(\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \right)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(l).$$

$$\text{ie } \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln(l)$$

$$\text{ic } \ln(u_n^{1/n}) + \frac{-\ln(u_0)}{n} \rightarrow \ln(1)$$

Et ainsi :

$$(u_n)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

→ car on a $l = +\infty$.

On applique de même la théorie de Cesàro, et :

$$(u_n)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

b. Calculons $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n}$

$$\text{on pose : } (u_n)_n = \left(\frac{2n}{n}\right)_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4.$$

$$\text{Donc d'après (a.), } \left(\frac{2n}{n}\right)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

c. Calculons $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \right)^{1/n}$

On pose $(v_n)_n = \left(\frac{n^n}{n!} \right)_n$

$v_n \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e.$$

Donc d'après (a.),

$$\left(\frac{n^n}{n!} \right)^{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e.$$