

Exercice 14

$$\text{Soit } (z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \begin{cases} z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \text{ avec } \theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ \forall n, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} \end{cases}$$

Prouvons la convergence et trouvons la limite de $(z_n)_n$.

On pose :

$$\forall n, z_n = r_n e^{i\theta_n},$$

sous forme trigonométrique.

Soit par récurrence que :

$$\forall n, z_n = r_0 e^{i \frac{\theta_0}{2^n}} \cdot \prod_{\ell=0}^n \cos\left(\frac{\theta_0}{2^\ell}\right)$$

→ Initialisation : cela fonctionne avec $n=0$.

→ Hérité. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n = r_0 \left(\prod_{\ell=0}^n \cos\left(\frac{\theta_0}{2^\ell}\right) \right) \cdot e^{i \frac{\theta_0}{2^n}}$$

Donc :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} r_0 \left(\prod_{\ell=0}^n \cos\left(\frac{\theta_0}{2^\ell}\right) \right) \left(1 + e^{i \frac{\theta_0}{2^n}} \right)$$

car $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

On a :

$$1 + e^{i \frac{\theta_0}{2^{n+1}}} = e^{i \frac{\theta_0}{2^{n+1}}} \left(e^{-i \frac{\theta_0}{2^{n+1}}} + e^{i \frac{\theta_0}{2^{n+1}}} \right) \\ = 2 e^{i \frac{\theta_0}{2^{n+1}}} \cos \left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}} \right)$$

D'ou :

$$z_{n+1} = z_0 e^{i \frac{\theta_0}{2^{n+1}}} \prod_{k=0}^{n+1} \cos \left(\frac{\theta_0}{2^k} \right)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule alors :

$$\sin \left(\frac{\theta_0}{2^n} \right) \prod_{k=0}^n \cos \left(\frac{\theta_0}{2^k} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{\theta_0}{2^k} \right) \cos \left(\frac{\theta_0}{2^n} \right) \sin \left(\frac{\theta_0}{2^n} \right) \\ = \prod_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{\theta_0}{2^k} \right) \sin \left(\frac{\theta_0}{2^{n-1}} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

En itérant :

$$\sin \left(\frac{\theta_0}{2^n} \right) \prod_{k=0}^n \cos \left(\frac{\theta_0}{2^k} \right) = \frac{1}{2^n} \sin \theta_0.$$

→ On suppose d'abord que :

$$\forall n, \sin \left(\frac{\theta_0}{2^n} \right) \neq 0 \text{ i.e. } \forall n \frac{\theta_0}{2^n} \notin \pi \mathbb{Z}$$

$$\text{i.e. } \theta_0 \notin \pi \mathbb{Z}.$$

Alors :

$$\forall n, z_n = \frac{z_0 \sin(\theta_0)}{2^n \sin \left(\frac{\theta_0}{2^n} \right)} \cdot e^{i \frac{\theta_0}{2^{n+1}}}$$

$$O_2 \quad \frac{\theta_0/2^n}{\sin(\frac{\theta_0}{2^n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$$e^{i \frac{\theta_0}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Mini :

$$z_n \rightarrow \frac{r_0 \sin(\theta_0)}{\theta_0}$$

$\rightarrow$ Pour $\theta_0 \in \pi \mathbb{Z}$.

- S: $\theta_0 \in 2\pi \mathbb{Z}$,

$$\text{alors } \forall n, |z_n| = z_n$$

$$\text{et } \forall n, z_{n+1} = z_n.$$

$$\text{Donc } \forall n, z_n = z_0 = r_0.$$

1^{re} route à éviter pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.