

1/2

Exercice 13

Soit $\lambda \in]-1; 1[$, $(u_n) \in \mathbb{R}^N$,
et (v_n) telle que :

$$\forall n, v_n = u_{n+1} - \lambda v_n.$$

Montrer que $(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow (v_n) \text{ converge}$

$\rightarrow$ Soit retour : (v_n) converge.

$$\exists l \in \mathbb{R} : v_n \rightarrow l.$$

$$\text{Donc } u_n \rightarrow l - \lambda l.$$

$\rightarrow$ Soit aller : (u_n) converge.

$\rightarrow$ Si $\lambda = 0$, alors (v_n) converge.

$\rightarrow$ Si $\lambda \in]0; 1[$.

$$\forall n, u_{n+1} - \lambda v_n = v_n$$

Posons (z_n) telle que :

$$\forall n, u_n = z_n \cdot \lambda^n$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{n+1}(z_{n+1} - z_n) = v_n$$

donc
$$z_{n+1} - z_n = \frac{v_n}{2^{n+1}}$$

En télescopant, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n - z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{2^{k+1}}$$

donc
$$u_n = 2^n z_0 + 2^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{2^{k+1}}$$

$$= 2^n z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k 2^{n-k-1}$$

$$= 2^n z_0 + \sum_{j=0}^{n-1} v_{n-j-1} 2^j$$

Car (v_n) est convergente,
 $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}, j \in \{0, n-1\}$

$$0 \leq |v_{n-j-1} 2^j| \leq M \cdot 2^j$$

Or la série $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j$ converge car
géométrique avec $2 \in]0, 1[$.

Donc par comparaison, la série
 $\left(\sum_{j=0}^{n-1} |v_{n-j-1} z^j| \right)_n$ converge, et donc
 la série $\left(\sum_{j=0}^{n-1} v_{n-j-1} z^j \right)_n$ converge
 absolument.

De plus, $z_{n0} \rightarrow 0 \quad (z \in]0; 1[)$

Ainsi $(v_n)_n$ converge.