

Exercice 5:

$$C = 0,1234567891011 \dots$$

On suppose que l'on a $N_1 < N_2$ tq $N_1 \dots \dots N_2$

Soit la "période"

$$10^{\lfloor \log_{10}(N_2) \rfloor + 1} \notin [N_1, N_2]$$

or dans C , $\lfloor \log_{10}(N_2) \rfloor + 1$ "0" apparaissent consécutifs

ce qui est absurde car $\underbrace{0000 \dots 000}_{\lfloor \log_{10}(N_2) \rfloor + 1}$ n'est

pas dans la "période" $N_1 \dots N_2$

Exercice 4:

$x \in \mathbb{Q} \iff$ la suite des décimales est périodique APCR

$$\Leftrightarrow \text{hyp: } x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$
$$\in \mathbb{Z} \quad \in [0, 1[$$

$$\text{avec } \{x\} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_{N_1} - a_{N_1+p} a_{N_1} - a_{N_1+p} \dots$$

$$= \underbrace{0, a_1 a_2 \dots a_{N_1-1}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{0, 0 \dots 0 a_{N_1} - a_{N_1+p} a_{N_1} \dots a_{N_1+p} \dots}_{= b}$$

$$= b \cdot (10^{-(N_1+p)} + 10^{-(N_1+2p)} + \dots)$$

$$= \underbrace{b \cdot 10^{-(N_1+p)}}_{\in \mathbb{Q}} (1 + 10^{-p} + 10^{-2p} + \dots)$$

$$\text{et } 1 + 10^{-p} + 10^{-2p} + \dots \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-kp} = \frac{1}{1-10^{-p}} \in \mathbb{Q}$$

d'où : $\{x\} \in \mathbb{Q}$

donc $x \in \mathbb{Q}$

Exemple (pour exo 4):

$$x = 123,76423423423\dots$$

$$= 123,76 + 423 \times (10^{-5} + 10^{-8} + 10^{-11} + \dots)$$

$$= 123,76 + 423 \times 10^{-5} \left(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \dots \right)$$

$$\sum_m 10^{-3m} = \frac{1}{1-10^{-3}} = \frac{1000}{999}$$

d'où $x \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \text{hypo: } x \in \mathbb{Q} : x = \frac{p}{q}, q > 0$$

$$\text{division euclidienne: } \begin{cases} p = aq + b \\ 0 \leq b < a \end{cases} \Rightarrow x = a + \frac{b}{q} \in [0, 1[$$

$$\text{on prend pour exemple } x = \frac{42}{13}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ - 39 \\ \hline 30 \\ - 26 \\ \hline 40 \\ - 39 \\ \hline 100 \\ - 91 \\ \hline 90 \\ - 78 \\ \hline 120 \\ - 117 \\ \hline 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 3, \underline{230769} \underline{230769} \end{array}$$

on effectue les divisions euclidiennes successives :

les restes obtenus sont dans $[0, q-1]$

La mbs fini de reste possible

Si deux restes sont égaux, alors les deux quotients suivants sont aussi égaux.

$\Rightarrow$ la suite des décimales est périodique dès que l'on retombe sur un m même reste