

date : TD 02/09 (3)

Exo 2:

(a) $f(x) = \sin(x)$ $u_{n+1} = \sin u_n$
 $\sin x \leq x$ sur $[0, \pi]$ et $\sin x \geq x$ sur $[-\pi, 0]$

$$\begin{aligned} f(x) - x &\leq 0 \rightarrow u_n \text{ décroissante sur } [0, \pi] \\ &\geq 0 \rightarrow u_n \text{ croissante sur } [-\pi, 0] \end{aligned}$$

Intervalle stable par f : $\rightarrow$ bornée et monotone
 $\rightarrow$ conv. vers un pt. fixe : (TLM)
ici $l=0$

$$\begin{aligned} \forall u_0 \in \mathbb{R}, u_1 = \sin u_0 \in [-1; 1] \\ \text{donc } u_1 \in [-\pi; 0] \text{ ou } [0; \pi] \end{aligned}$$

(b) $\forall u_0 \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq u_1 = 1 - \cos u_0 \leq 2 \leq \pi$
donc $u_1 \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \cos(x) \\ f'(x) &\geq 0 \quad (\text{car } x \in [0, \pi]) \end{aligned}$$

donc $(u_n)_n$ est monotone (APCR (à partir de u_1))
et $(u_n)_n$ est bornée

Donc $(u_n)_n$ converge par TLM, vers un point fixe :
ici $l=0$

③ APCR: $u_n < 1$

or sur $]0, 1[$: $\sin x < x$

donc $\exists h' \in]0, 1[$ tel que: $\sin x = h'x$

on prend $h = \frac{h'+1}{2}$ et $\sin x \leq hx$

donc $\sin(u_{n+1}) \leq \sin(u_n) \leq h u_n$

$\rightarrow 0 < u_{n+1} < u_n < 1$ (à partir de $n=2$)

et $u_n \rightarrow 0$

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

$$= u_n \left[1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right]$$

$$u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha \left[1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right]^\alpha$$

$$= u_n^\alpha \left[1 - \frac{\alpha}{6} u_n^2 + o(u_n^2) \right] = u_n^\alpha - \frac{\alpha}{6} u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{\alpha+2})$$

Pour $\alpha = -2$:

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{3} + o(1) \rightarrow \frac{1}{3}$$

Lemme de l'écrasé (Césaro):

$$\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3} \quad \text{donc} \quad u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Donc on a ramène à $\frac{\sqrt{3}}{n} \leq ck^n$?

or $k^n = o\left(\frac{\sqrt{3}}{n}\right)$ donc $\boxed{\nexists k \text{ tq } \dots}$