

Exercices traités : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 34 ; 36 ; 55
(+ idée pour le 45)

alékhov : TD séance du 02/03 ①

Exercice 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \quad \text{avec } x_0 > 1$$

montrer que $x_n \sim \sqrt{2n}$

$x_0 > 1$: par récurrence, on peut mq $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 0$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0$$

donc (x_n) est croissante

(x_n) admet une limite par TLM, on suppose $l \in \mathbb{R}$

$$\text{alors } \frac{1}{l} = 0 \quad (\text{Absurde}) \quad \text{donc } x_n \rightarrow +\infty$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^\alpha &= x_n^\alpha \left(1 + \frac{1}{x_n^2} \right)^\alpha \\ &= x_n^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{x_n^2} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$x_{n+1}^\alpha - x_n^\alpha = \frac{\alpha}{x_n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{x_n^{2-\alpha}}\right)$$

$$\text{pour } \alpha = 2 : x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + o(1)$$

$$\frac{1}{n} \sum x_{n+1}^2 - x_n^2 \rightarrow 2$$

$$\text{donc } x_n^2 = 2n + o(n)$$

$$\text{d'où } x_n \sim \sqrt{2n}$$