UN CORRIGÉ du SUJET Centrale 2022, MATH 1 PC

I. Généralités sur les matrices symétriques réelles

Q1. Si A est orthodiagonalisable, alors $A = PDP^\top$ avec D diagonale et P orthogonale, puis $A^\top = (PDP^\top)^\top = PD^\top P^\top = PDP^\top = A$ puisque $D^\top = D$ et $(P^\top)^\top = P$, donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Inversement, toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable, c'est la version matricielle du théorème spectral.

I.A. Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Q2. On remarque que $C_1(A_1) + C_3(A_1) = A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1 asocié à la valeur propre $\lambda_1 = 7$.

Q3. La matrice $A_1 - 7I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ est visiblement de rang 1, donc par le théorème du rang, $\dim\big(E_7(A_1)\big) = 2$, et $E_7(A_1)$ est le plan d'équation cartésienne $2x + y - 2z = 0$, on peut aussi le décrire par $E_7(A_1) = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$ avec $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Remarque. En résolvant le système $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$, *j'ai recherché dans le plan $E_7(A_1)$ un vecteur non nul orthogonal à X_1, ce sera utile pour la suite.*

Comme A_1 est symétrique réelle, elle est (ortho)diagonalisable, et la somme de ses valeurs propres (réelles) est égale à sa trace. On a le nombre 7 comme valeur propre double, et il reste une valeur propre simple λ_2 telle que $2 \times 7 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A_1) = 12$, donc $\lambda_2 = -2$. Ainsi, $\mathrm{sp}(A_1) = \{-2, 7\}$, avec -2 simple et 7 double.

Q4. Les sous-espaces propres de A_1 sont deux à deux orthogonaux car la matrice est symétrique réelle, on déduit ici que $E_{-2}(A_1) = \big(E_7(A_1)\big)^\perp = \mathrm{Vect}(X_3)$ avec $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, (X_1, X_2, X_3) constitue une base orthogonale de vecteurs propres de A_1, il ne reste plus qu'à normer ces vecteurs pour orthodiagonaliser A_1. On a donc

$$A_1 = PDP^\top = PDP^{-1}\ , \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Remarque. C'est une solution parmi d'autres.

I.B. Un exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q.5. Il est clair que φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, positive car $\varphi(P, P) = \int_0^1 P(t)^2 \, \mathrm{d}t \geq 0$. Enfin, si $\varphi(P, P) = 0$, alors la fonction $t \mapsto P(t)^2$ étant continue d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, elle est nulle sur $[0, 1]$ donc le polynôme P, qui a une infinité de racines, est le polynôme nul. Ceci assure le caractère défini de φ, qui est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q6. Pour $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$, on a $h_{i,j} = \varphi(X^i, X^j) = \int_0^1 t^{i+j} \, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{i + j + 1}$, donc

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \; .$$

Q7. Un calcul classique (*peut-être pas tant que ça en PC*) donne, en posant $U = \begin{pmatrix} u_0 & \cdots & u_{n-1} \end{pmatrix}^\top$,

$$U^\top H U = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j} u_i u_j = \sum_{i,j} \varphi(X^i, X^j)\, u_i u_j \; .$$

Q8. L'appartenance de H à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est immédiate. Si on poursuit le calcul obtenu en **Q7.**, on note que, par bilinéarité de φ,

$$U^\top H U = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(u_i X^i, u_j X^j) = \varphi\Big(\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i \; , \; \sum_{j=0}^{n-1} u_j X^j \Big) = \varphi(P_U, P_U)$$

en introduisant le polynôme $P_U = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Si λ est une valeur propre de H, si $U = \begin{pmatrix} u_0 & \cdots & u_{n-1} \end{pmatrix}^\top$ est un vecteur propre associé, on a alors $HU = \lambda U$, puis $U^\top H U = \lambda\, U^\top U = \lambda\, \|U\|^2 = \varphi(P_U, P_U) > 0$ puisque P_U n'est alors pas le polynôme nul, donc $\lambda = \dfrac{\varphi(P_U, P_U)}{\|U\|^2} > 0$.

I.C. Rayon spectral

Q.9. Si A est nilpotente, alors $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$. En effet, la matrice A ne peut être inversible puisque $A^p = 0_n$, donc $0 \in \mathrm{sp}(A)$, et $\mathrm{sp}(A) \neq \emptyset$. D'autre part, si un réel λ appartient à $\mathrm{sp}(A)$, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre associé, on a $X \neq 0$ et $A^p X = \lambda^p X = 0$ donc $\lambda^p = 0$ puis $\lambda = 0$, ce qui prouve que $\mathrm{sp}(A) \subset \{0\}$. Donc $\rho(A) = 0$.

Q10. L'ensemble C est la sphère de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et il est inscrit dans le programme que toute sphère est une partie fermée.

Q11. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ U & \mapsto & |U^\top A U| \end{cases}$ est continue. En effet, l'application $\alpha : U \mapsto AU$ est continue car c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\beta : (U,V) \mapsto U^\top V = (U|V)$ est continue car c'est une forme bilinéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, enfin la valeur absolue $v : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\varphi : U \mapsto v\Big(\beta\big(U, \alpha(U)\big)\Big)$ est continue par composition. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet donc un maximum sur la partie fermée bornée C de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q12. En supposant toujours $\mathrm{sp}(A) \neq \emptyset$, il existe une valeur propre réelle de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, soit U un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre. Alors $U \in C$ et $AU = U$, puis $U^\top A U = \lambda\, U^\top U = \lambda$ et $|U^\top A U| = \rho(A)$, donc $\rho(A) \leq \max\limits_{U \in C} |U^\top A U|$.

I.D. Rayon spectral d'une matrice symétrique

Q.13. Si A est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable: $A = PDP^\top$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ diagonale réelle. Alors $\rho(A) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ et, pour tout $U \in C$, on a $U^\top AU = U^\top PDP^\top U = V^\top DV$ en posant $V = P^\top U$. Comme $PP^\top = I_n$, on déduit $V^\top V = U^\top PP^\top U = U^\top U = 1$ donc $V \in C$ et, si on pose $V = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^\top$, alors

$$|U^\top AU| = |V^\top DV| = \Big| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2 \Big| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| v_i^2 \leq \rho(A) \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2 = \rho(A) \cdot V^\top V = \rho(A) .$$

Donc $\max\limits_{U \in C} |U^\top AU| \leq \rho(A)$, puis l'égalité grâce à **Q12.**

Q14. Si $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, en reprenant les notations introduites dans la question précédente, alors

$$U^\top AU = V^\top DV = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2 \geq 0$$

puisque les λ_i sont positifs. Donc $|U^\top AU| = U^\top AU$ et $\max\limits_{U \in C}(U^\top AU) = \rho(A)$.

Q15. On a bien $\rho(A) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Ensuite, $\rho(A) = 0 \iff \max\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda| = 0 \iff \mathrm{sp}(A) = \{0\}$, ce qui équivaut à $A = 0_n$ puisque A est diagonalisable, d'où l'axiome de séparation.

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{sp}(\alpha A) = \alpha\, \mathrm{sp}(A) = \big\{\alpha\lambda \,;\, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\big\}$, donc

$$\rho(\alpha A) = \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \big(|\alpha|\, |\lambda|\big) = |\alpha| \cdot \max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda| = |\alpha|\, \rho(A) ,$$

d'où l'homogénéité.

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $C \in U$, on a

$$\big|U^\top (A+B)U\big| = \big|U^\top AU + U^\top BU\big| \leq |U^\top AU| + |U^\top BU| \leq \rho(A) + \rho(B) .$$

Cette majoration étant valable pour tout $U \in C$, on déduit que $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ grâce à **Q13.**, soit l'inégalité triangulaire.

Donc ρ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

II. Matrices de covariance

II.A.

Q16. La matrice Σ_Y est symétrique puisque $\sigma_{j,i} = \mathrm{cov}(Y_j, Y_i) = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \sigma_{i,j}$.

De plus, $\sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{E}\Big(\big(Y_i - \mathrm{E}(Y_i)\big)\, \big(Y_j - \mathrm{E}(Y_j)\big)\Big)$ est l'espérance de la variable aléatoire réelle $\big(Y_i - \mathrm{E}(Y_i)\big)\, \big(Y_j - \mathrm{E}(Y_j)\big)$, qui est bien le coefficient d'indices (i,j) de la matrice aléatoire $\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\, \big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^\top$, ce que l'on peut écrire

$$\Sigma_Y = \mathrm{E}\Big(\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\, \big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^\top\Big) .$$

Si $U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur constant, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indices (i,j) de Σ_{Y+U} est, par bilinéarité de la covariance,

$$\operatorname{cov}(Y_i+u_i, Y_j+u_j) = \operatorname{cov}(Y_i, Y_j) + \operatorname{cov}(Y_i, u_j) + \operatorname{cov}(u_i, Y_j) + \operatorname{cov}(u_i, u_j) = \sigma_{i,j}$$

puisque la covariance de deux variables aléatoires réelles, dont une est constante, est nulle. Ainsi, $\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y$.

Q17. Posons $Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_1(\omega) \\ \vdots \\ Z_p(\omega) \end{pmatrix}$ pour tout $\omega \in \Omega$, et $M = (m_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$.

Les variables aléatoires réelles $Z_1, \cdots, Z_p$ sont combinaisons linéaires des Y_j, plus précisément $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} Y_j$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Par linéarité de l'espérance, chaque Z_i est d'espérance finie et $\mathrm{E}(Z_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\mathrm{E}(Y_j)$, soit matriciellement $\mathrm{E}(Z) = M \cdot \mathrm{E}(Y)$.

Les variables aléatoires réelles Y_j ont un moment d'ordre deux fini (i.e. "admettent une variance"), on sait donc (*même si les programmes n'ont jamais été très explicites sur ce point*) qu'il en est de même de toute combinaison linéaire de ces variables (*cela résulte notamment de l'inégalité usuelle* $|ab| \leq \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$, *et cette même inégalité entraîne aussi l'existence des covariances*), donc $\operatorname{cov}(Z_i, Z_j)$ existe bien pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ puis, par bilinéarité de la covariance,

$$\operatorname{cov}(Z_i, Z_j) = \operatorname{cov}\Big(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} Y_k \ , \ \sum_{l=1}^{n} m_{j,l} Y_l\Big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_{i,k}\, \sigma_{k,l}\, m_{j,l} \ .$$

On reconnaît l'écriture du coefficient d'indices (i,j) de la matrice produit $M\,\Sigma_Y\,M^\top$.

Donc $\Sigma_Z = M\,\Sigma_Y\,M^\top$.

II.B. Propriétés des valeurs propres

Q18. L'orthodiagonalisation de la matrice symétrique Σ_Y s'écrit $\Sigma_Y = PDP^\top$, où la matrice diagonale $D = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ porte les valeurs propres de Σ_Y. Comme P est orthogonale, on a $D = P^\top\,\Sigma_Y\,P = \Sigma_X$ d'après **Q17.** Donc $\Sigma_X = D$ est diagonale.

Q19. Les matrices Σ_Y et Σ_X sont semblables, donc ont les mêmes valeurs propres. Or, les valeurs propres de la matrice diagonale Σ_X sont ses coefficients diagonaux λ_i $(1 \leq i \leq n)$, qui sont les variances $\mathrm{V}(X_i)$, donc qui sont positifs. Ainsi, $\mathrm{sp}(\Sigma_Y) \subset \mathbb{R}_+$.

Q20. Les matrices Σ_X et Σ_Y sont semblables, donc ont la même trace. Donc les vecteurs aléatoires X et Y ont la même variance totale:

$$\mathrm{V}_T(X) = \mathrm{tr}(\Sigma_X) = \mathrm{tr}(\Sigma_Y) = \mathrm{V}_T(Y) \ .$$

II.C. Étude de la réciproque

Q21. Il suffit de considérer n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $Z_1, \cdots, Z_n$, de variances respectives $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, par exemple des variables de Poisson de paramètres λ_i (ou une variable aléatoire constante si $\lambda_i = 0$). On a alors $\Sigma_Z = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Doit-on véritablement "démontrer l'existence" de telles variables aléatoires qui soient mutuellement indépendantes ?

Q22. On orthodiagonalise A, soit $A = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les λ_i étant positifs. D'après **Q21.**, il existe un vecteur aléatoire Z à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\Sigma_Z = D$. Le vecteur aléatoire $Y = PZ$ vérifie alors $\Sigma_Y = P\,\Sigma_Z\,P^\top = PDP^\top = A$.

II.D.

Q23. X est une variable aléatoire réelle, $X = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i$ en posant $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$.

Donc X est une combinaison linéaire de variables aléatoires réelles admettant une variance, elle admet donc aussi une variance et

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i\ ,\ \sum_{j=1}^{n} u_j Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j\ \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = U^\top\,\Sigma_Y\,U\ .$$

Remarque. Avec les mêmes notations, $\mathrm{E}(X) = U^\top \mathrm{E}(Y)$. En effet, par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} u_i\ \mathrm{E}(Y_i) = \big(U|\mathrm{E}(Y)\big) = U^\top \mathrm{E}(Y)\ ,$$

on s'en servira en **Q27.**

II.E. Image de Σ_Y

Q24. Si $r = n$, c'est trivial puisqu'alors $\mathrm{Im}(\Sigma_Y) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\big\{Y - \mathrm{E}(Y) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_Y\big\}$ est l'événement certain.

Q25. C'est une propriété générale des matrices symétriques réelles. Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors les sous-espaces $\mathrm{Ker}(S)$ et $\mathrm{Im}(S)$ sont orthogonaux: si $V \in \mathrm{Im}(S)$ et $W \in \mathrm{Ker}(S)$, soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $V = SU$, alors $(V|W) = (SU|W) = (U|S^\top W) = (U|SW) = 0$. Cela entraîne classiquement que ces deux sous-espaces sont en somme directe, soit $\mathrm{Ker}(S)\ \cap\ \mathrm{Im}(S) = \{0\}$. Enfin, le théorème du rang permet de conclure qu'ils sont supplémentaires, soit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(S) \oplus \mathrm{Im}(S)$.

Q26. Introduisons le vecteur constant $U = \mathrm{E}(Y)$, alors d'après **Q23.**, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$,

$$\mathrm{V}\Big(V_j^\top\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\Big) = \mathrm{V}\big(V_j^\top(Y - U)\big) = V_j^\top \Sigma_{Y-U} V_j = V_j^\top \Sigma_Y V_j$$

en utilisant la fin de **Q16.** Enfin, $V_j \in \mathrm{Ker}(\Sigma_Y)$ donc $\Sigma_Y V_j = 0$ et $\mathrm{V}\Big(V_j^\top\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\Big) = 0$.

Q27. La variable aléatoire réelle $V_j^\top\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)$, de variance nulle, est donc presque sûrement constante. Mais son espérance est nulle d'après la remarque à la fin de **Q23.** puisque

$$\mathrm{E}\Big(V_j^\top\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\Big) = V_j^\top \cdot \mathrm{E}\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big) = V_j^\top \cdot 0 = 0\ .$$

Cette variable aléatoire est donc presque sûrement nulle.

Q28. En utilisant **Q25.**, on observe que

$$\big\{Y - \mathrm{E}(Y) \in \mathrm{Im}\,\Sigma_Y\big\} = \big\{Y - \mathrm{E}(Y) \in (\mathrm{Ker}\,\Sigma_Y)^\perp\big\} = \bigcap_{j=1}^{d} \Big\{V_j^\top\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big) = 0\Big\}\ .$$

Or, il résulte de la sous-additivité d'une probabilité qu'une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables (i.e. de probabilité nulle) est encore négligeable et, par passage à l'événement contraire, on déduit que toute intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est encore presque sûre. Donc

$$\mathrm{P}\big(Y - \mathrm{E}(Y) \in \operatorname{Im}\Sigma_Y\big) = 1\ .$$

III. Maximisation de la variance

III.A. Un exemple dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Q29. Soit $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$, où Y_1, Y_2, Y_3 sont trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, de variances respectives 9, 5 et 4. Alors $\Sigma_Y = A_2$. *On peut aussi se contenter d'invoquer* **Q21.**

Q30. Pour tout $U \in C$, on a $q_Y(U) = U^\top\,\Sigma_Y\,U = U^\top A_2 U$ d'après **Q23.** Comme A_2 est symétrique à valeurs propres positives, il résulte alors de **Q14.** que

$$\max_{U\in C} q_Y(U) = \rho(A_2) = \max\big(\mathrm{sp}(A_2)\big) = 9\ .$$

III.B. Cas général

Q31. Comme Σ_Y est symétrique à valeurs propres positives, il résulte de **Q14.** toujours que $q_Y(U) = U^\top\Sigma_Y U = |U^\top\Sigma_Y U|$ pour tout $U \in C$, l'existence d'un maximum de q_Y sur C est donc précisément la question **Q11.**

De **Q14.**, on déduit que $\max\limits_{U\in C} q_Y(U) = \rho(\Sigma_Y) = \max\big(\mathrm{sp}(\Sigma_Y)\big)$.

Comme en **Q12.**, si λ est la plus grande valeur propre de Σ_Y (ici, elles sont toutes réelles positives), si $U_0 \in C$ est un vecteur propre associé, alors $q_Y(U_0) = \lambda = \rho(\Sigma_Y) = \max\limits_{U\in C} q_Y(U)$, soit

$$\max_{U\in C} \mathrm{V}(U^\top Y) = \mathrm{V}(U_0^\top Y)\ .$$

III.C. Étude d'un exemple

Q32. Par une inégalité de Cauchy-Schwarz (*celle qui permet d'affirmer qu'un coefficient de corrélation est toujours dans* $[-1,1]$, *et qui résulte du fait que la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur* $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{B},\mathrm{P})$), on doit avoir $\mathrm{cov}(Y_1,Y_2)^2 \le \mathrm{V}(Y_1)\mathrm{V}(Y_2)$, soit $\sigma_{1,2}^2 \le \sigma_{1,1}\,\sigma_{2,2}$, soit ici $\sigma^4\gamma^2 \le \sigma^4$, ce qui entraîne $\gamma^2 \le 1$, puis $\gamma \le 1$.

On a facilement $\Sigma_Y = \sigma^2\,\big(\gamma J + (1-\gamma)I_n\big)$.

Q33. La matrice J est symétrique donc diagonalisable, elle est de rang 1 donc elle admet 0 comme valeur propre avec un sous-espace propre $E_0(J) = \mathrm{Ker}(J)$ de dimension $n-1$ par le théorème du rang. Enfin, sa trace est n, donc n est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension 1, et $\mathrm{sp}(J) = \{0, n\}$. En posant $V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top$, on a $JV = nV$, donc V est un vecteur propre de J associé à sa valeur propre de module maximal, à savoir n.

Q34. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si a et b sont deux réels, on montre facilement que

$$\mathrm{sp}(a\,A + b\,I_n) = \big\{a\lambda + b\ ;\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\big\}\ .$$

L'expression de Σ_Y obtenue en **Q32.** et l'étude du spectre de J faite en **Q33.** montrent alors que

$$\mathrm{sp}(\Sigma_Y) = \Big\{\sigma^2(1-\gamma)\ ,\ \sigma^2\big(1+(n-1)\gamma\big)\Big\}\ .$$

Donc $\rho(\Sigma_Y) = \max\big(\mathrm{sp}(\Sigma_Y)\big) = \sigma^2\big(1+(n-1)\gamma\big)$. D'après **Q31.**, pour maximiser q_Y sur C, on prend un vecteur propre unitaire de Σ_Y associé à la valeur propre maximale $\rho(\Sigma_Y)$, et l'expression de Σ_Y en fonction de J nous montre qu'il suffit pour cela de prendre un vecteur propre unitaire de J associé à sa valeur propre maximale n. En prenant

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}\,V = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\ ,$$

on a un vecteur $U_0 \in C$ tel que $q_Y(U_0) = \max\limits_{U\in C} q_Y(U)$, ce que l'on recherchait.

Q35. D'après **Q31.**, on a $\mathrm{V}(Z) = \mathrm{V}(U_0^\top Y) = \rho(\Sigma_Y) = \sigma^2\big(1+(n-1)\gamma\big)$, alors que

$$\mathrm{V}_T(Y) = \mathrm{tr}(\Sigma_Y) = n\,\sigma^2\ ,\quad \text{donc}\quad \frac{\mathrm{V}(Z)}{\mathrm{V}_T(Y)} = \frac{1+(n-1)\gamma}{n} = 1-(1-\gamma)\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\ .$$

III.D.

Q36. L'application $q_Y : U \mapsto U^\top\Sigma_Y U$ est toujours continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et la partie C' est bornée car incluse dans C, fermée comme intersection de deux fermés puisque $C' = C\ \cap\ \big(\mathrm{Vect}(U_0)\big)^\perp$, non vide car il existe dans l'hyperplan $\big(\mathrm{Vect}(U_0)\big)^\perp$ des vecteurs unitaires. Donc q_Y admet un maximum sur C' par le théorème des bornes atteintes.

Q37. Soit $\mathcal{B} = (E_1, \cdots, E_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de Σ_Y, associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$. Soit $U \in C$, décomposons-le dans cette base: $U = \sum\limits_{i=1}^n u_i E_i$, on a alors $1 = U^\top U = \|U\|^2 = \sum\limits_{i=1}^n u_i^2$ puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormale. D'autre part,

$$q_Y(U) = \mathrm{V}(U^\top Y) = U^\top\Sigma_Y U = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n u_i u_j E_i^\top\Sigma_Y E_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$$

puisque $\Sigma_Y E_j = \lambda_j E_j$ et que $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). Avec cette écriture, on retrouve que $q_Y(U) \leq \lambda_1 \sum\limits_{i=1}^n u_i^2 = \lambda_1 = \rho(\Sigma_Y)$, et que cette valeur est atteinte si et seulement si $\sum\limits_{i=2}^n (\lambda_1-\lambda_i)u_i^2 = 0$, donc si et seulement si $u_i = 0$ pour $i \in [\![2, n]\!]$ (puisqu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul). Donc $\max\limits_{U\in C} q_Y(U) = \lambda_1$, et cette valeur maximale est atteinte uniquement si le vecteur unitaire U vaut E_1 ou $-E_1$, le vecteur U_0 de l'énoncé (*qui doit appartenir à C même si ce n'est pas précisé*) est donc nécessairement un de ces deux vecteurs.

Ensuite, $\big(\mathrm{Vect}(U_0)\big)^\perp$ est l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(E_2, \cdots, E_n)$, et un calcul analogue à celui qui précède montre que

$$\max_{U\in C'} q_Y(U) = \max_{U\in C\,\cap\, H} q_Y(U) = \lambda_2$$

et que cette valeur est atteinte en prenant $U = U_1 = \pm E_2$ (et seulement pour ces deux vecteurs).

Q38. Si A et B sont deux variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre deux, on a

$$\mathrm{V}(A+B) = \mathrm{V}(A) + 2\,\mathrm{cov}(A,B) + \mathrm{V}(B) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(A-B) = \mathrm{V}(A) - 2\,\mathrm{cov}(A,B) + \mathrm{V}(B)\ ,$$

donc $\mathrm{cov}(A,B) = \dfrac{1}{4}\big(\mathrm{V}(A+B) - \mathrm{V}(A-B)\big)$ (identité de polarisation).

Comme U_0 et U_1 sont des vecteurs propres unitaires de Σ_Y associés respectivement aux valeurs propres λ_1 et λ_2, et que ces deux vecteurs sont orthogonaux, on a $U_0^\top \Sigma_Y U_1 = U_1^\top \Sigma_Y U_0 = 0$, puis $U_0^\top \Sigma_Y U_0 = \lambda_1$, $U_1^\top \Sigma_Y U_1 = \lambda_2$, et finalement

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(U_0^\top Y, U_1^\top Y) &= \frac{1}{4}\Big(\mathrm{V}\big((U_0+U_1)^\top Y\big) - \mathrm{V}\big((U_0-U_1)^\top Y\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big((U_0+U_1)^\top \Sigma_Y (U_0+U_1) - (U_0-U_1)^\top \Sigma_Y (U_0-U_1)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big((\lambda_1+\lambda_2) - (\lambda_1+\lambda_2)\Big) \\
&= 0\ ,
\end{aligned}$$

les variables $U_0^\top Y$ et $U_1^\top Y$ sont donc décorrélées.