**Q. 1** Si $A$ est orthodiagonalisable alors il existe $P$ orthogonale et $D$ diagonale donc symétrique telles que $A = PDP^T$. Et évidemment $A^T = PDP^T = A$. Ainsi $A$ est symétrique. Réciproquement, le théorème spectral indique que $A$ est orthodiagonalisable.

**Q. 2** On "remarque" $A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 7.

**Q. 3** On détermine le sous espace propre associé à 7. L'équation $A_1 X = 7X$ revient à $-2x - y + 2z = 0$ (3 équations proportionnelles). On retrouve bien le premier vecteur propre obtenu mais aussi que le s.e.p. est de dim 2. Comme $A$ est symétrique, réelle, elle est diagonalisable et 7 est valeur propre double. En utilisant la trace de $A_1$, on obtient que la troisième valeur propre est -2.

**Q. 4** Terminons la détermination de vecteurs propres associés orthogonaux à 7. En utilisant le premier vecteur, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 & \star & -1 \end{pmatrix}$ lui est toujours orthogonal. On cherche alors la valeur de $\star$ pour rester dans le s.e.p. et on trouve $\star = -4$. Enfin un produit vectoriel (appris en physique !), permet d'obtenir un vecteur propre associé à $-2$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Il reste à normaliser ces trois vecteurs.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(7, 7, -2)$$

**Q. 5** (Question très classique) D'après les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, $\phi$ est une forme bilinéaire, symétrique, positive. Enfin, si $\phi(P, P) = 0$ alors par continuité et positivité, $\forall t \in [0, 1]$ $P(t) = 0$. Or $P$ est un polynôme de degré au plus $n - 1$ qui admet une infinité de racines donc $P = 0$. Cela indique donc que $\phi$ est un produit scalaire.

**Q. 6** $h_{ij} = \phi(X^i, X^j) = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j}\, dt = \frac{1}{i + j + 1}$

**Q. 7**

$$U^T H U = (u_0, \dots, u_{n-1}) H \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \phi(\sum_{i=0}^{n-1} u_i X^i, \sum_{j=0}^{n-1} u_j X^j)$$

**Q. 8** $h_{ij} = h_{ji}$ en utilisant l'expression du résultat ou la symétrie du produit scalaire.
$H$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Soit donc $\lambda$ une valeur propre et $X$ un vecteur propre associé. Alors $HX = \lambda X$ et $X^T H X = \lambda X^T X$ mais aussi $\phi(P, P)$ où $P$ est un polynôme dont les coefficients sont ceux de $X$. $P$ est évidemment non nul car $X$ est un vecteur propre. Donc $\phi(P, P) > 0$ et $X^T X = \|X\|^2 > 0$. Ainsi $\lambda > 0$.

**Q. 9** Soit $\lambda$ une valeur propre et $X$ un vecteur propre associé. $A^p X = 0$ donne $\lambda^p X = 0$. Comme $X$ est non nul, $\lambda = 0$. La seule valeur propre est 0 et $\rho(A) = 0$.

**Q. 10** J'utilise la caractérisation des fermés par les suites : soit $(U_n)$ une suite d'éléments de $C$ qui converge vers $U$. Alors par continuité de la norme, $\lim_{n\to+\infty} \|U_n\|^2 = \| \lim_{n\to+\infty} \| = \|U\| = 1$. Ce qui prouve que $C$ est un fermé.

**Q. 11** L'application est continue comme composée de $U \mapsto (U, U)$, de l'application bilinéaire continue sur un espace de dimension finie $(U, V) \mapsto U^T A V$ et de la valeur absolue. Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Et $C$ est un fermé borné dans un espace de dimension finie. Ainsi, l'application admet un maximum sur $C$.

**Q. 12** Soit $(\lambda, X)$ un couple d'éléments propres avec $X$ de norme 1. Alors $|X^T A X| = |\lambda|$.
Cela prouve que $|\lambda| \leqslant \max_{U\in C} |U^T A U|$.
Ceci étant vrai pour toutes les valeurs propres de $A$ qui n'en a que $n$ au plus, l'inégalité reste vraie pour le max et on obtient l'inégalité demandée.

**Q. 13** $A$ est orthodiagonalisable. Ainsi $\max_{U\in C} |U^T A U| = \max_{U\in C} |(PU)^T D (PU)|$.
$P$ est orthogonale donc inversible et $\|PU\| = \|U\|$. Le max devient $\max_{Y\in C} |Y^T D Y|$.
Or $|Y^T D Y| = |\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i y_i^2| \leqslant max(|\lambda|) \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2$ donc c'est inférieur à $\rho(A)$.

**Q. 14** Si les valeurs propres sont positives, le travail précédent reste valable en enlevant les valeurs absolues.

**Q. 15** $\rho(A)$ est clairement un réel positif car c'est un maximum d'un nombre fini de nombres positifs.
L'homogénéité ne pose pas de problème puisque les valeurs propres sont multipliées par $k$.
Si $\rho(A) = 0$, cela signifie que toutes les valeurs propres de $A$ sont nulles. Et comme $A$ est diagonalisable, $A$ est nulle.
Enfin $\rho(A+B) = \max_{U\in C} |U^T(A+B)U| \leqslant \max_{U\in C} |U^T AU| + \max_{U\in C} |U^T BU| \leqslant \rho(A) + \rho(B)$ d'où l'inégalité triangulaire.

**Q. 16** $\sigma_{i,j} = \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j) = \sigma_{j,i}$ par commutativité du produit.
$\Sigma_Y$ est bien symétrique.

**Q. 17** Le produit vecteur-vecteur fournit une matrice $n \times n$ de terme général $(Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j))$. L'énoncé indique qu'il suffit de prendre l'espérance de chaque coefficient. Ainsi $\Sigma_Y$ est bien de la forme proposée.
Si $U$ est constant, $E(U) = U$ et $E(Y + U) = E(Y) + U$. Donc $Y + U - E(Y + U) = Y - E(Y)$ et finalement $\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y$.
Pour tout $i$, $Z_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{ij}Y_j$.
Donc, par linéarité de l'espérance, $Z_i$ et $Z$ admettent une espérance. Et $E(Z) = ME(Y)$.
Le raisonnement effectué reste valable pour une multiplication par la droite et pour une matrice et on obtient bien évidemment la formule demandée.

**Q. 18** $\Sigma_X = P^T\Sigma_Y P$ d'après la Q17.
Comme $P$ est la matrice orthogonale des vecteurs propres de $\Sigma_Y$, qui est diagonalisable, on obtient que $\Sigma_X$ est diagonale.

**Q. 19** La diagonale de $\Sigma_X$ est formée de variances donc les valeurs propres sont positives. Or ce sont celles de $\Sigma_Y$.

**Q. 20** La trace est un invariant de similitude.

**Q. 21** L'énoncé indique qu'il existe des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes. Donc on prend $2\sqrt{D_i}X_i$ avec $p = \dfrac{1}{2}$. Leur variance sera alors $D_i$.

**Q. 22** $A$ est orthodiagonalisable. On utilise, de nouveau, Q17 avec $Y = PZ$ où $Z$ est définie comme dans la question précédente avec $D$, diagonale des valeurs propres de $A$.

**Q. 23** A priori, il n'est pas interdit d'utiliser Q17 avec $M = U^T$. Donc $\Sigma_X$ existe mais c'est simplement une matrice de taille 1. Donc $X$ admet une variance et la formule est correcte.

**Q. 24** $r = n$ donc $\Sigma_Y$ est inversible. Ainsi $\mathrm{Im}\Sigma_Y = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Et on obtient ainsi un événement certain et la probabilité demandée.

**Q. 25** (Question classique) Soit $U$ dans le noyau et $V$ dans l'image, $V = \Sigma_Y W$. Alors $U^T V = U^T \Sigma_Y W = (\Sigma_Y U)^T W$ car $\Sigma_Y$ est symétrique. Et comme $U$ est dans le noyau, $\Sigma_Y U = 0$. Ainsi $U$ et $V$ sont orthogonaux donc les deux sous-espaces sont orthogonaux. Leur intersection est donc réduite au vecteur nul et le théorème du rang permet d'obtenir finalement qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Q. 26** (Le choix de $V_j$ pour les vecteurs d'une base du noyau n'est pas une bonne idée quand on utilise la variance !) Par utilisation des Q23 et Q16, on a

$$V(V_j^T(Y - E(Y))) = V_j^T \Sigma_{Y-E(Y)} V_j = V_j^T \Sigma_Y V_j = 0$$

**Q. 27** Si la variance est nulle alors la variable aléatoire est constante presque sûrement. Or $E(Y - E(Y)) = 0$ donc la constante est nulle. D'où la probabilité annoncée.

**Q. 28** On vient de prouver que $(Y - E(Y))$ est orthogonale à tout vecteur du noyau. Donc $Y - E(Y)$ appartient presque sûrement à l'image.

**Q. 29** C'est la même question que la Q21 ou j'ai raté quelque chose.

**Q. 30** On utilise la Q23 pour obtenir $U^T \Sigma_Y U$ et comme les valeurs sont positives, on applique la Q14. Le maximum est 9.

**Q. 31** $\Sigma_Y$ est symétrique réelle à valeurs propres positives (Q16 et Q19). Donc on peut encore et toujours appliquer la question 14. Le maximum est alors la plus grande valeur propre et en prenant $U_0$ un vecteur propre normé associé, on a bien obtenu le maximum.

**Q. 32** D'après l'inégalité de C.-S., $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) \leqslant \sigma_{Y_i}\sigma_{Y_j}$ soit $\sigma^2\gamma \leqslant \sigma^2$ d'où $\gamma \leqslant 1$
$\Sigma_Y = \sigma^2\gamma J + \sigma^2(1-\gamma)I_n$

**Q. 33** $J$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Elle est de rang 1 donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$. La trace de $J$ vaut $n$ donc c'est la dernière valeur propre. Classiquement, un vecteur propre associé est le vecteur formé de 1.

**Q. 34** Les valeurs propres de $\Sigma_Y$ sont donc $\sigma^2(1-\gamma)$ et $\sigma^2(1+\gamma(n-1))$, toutes deux positives et la deuxième est la plus grande. On utilise la Q31. Le vecteur propre associé unitaire est donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1)^T = U_0$

**Q. 35** $V_T(Y) = \mathrm{Tr}(\Sigma_Y) = n\sigma^2$ donc la proportion est $\dfrac{1+\gamma(n-1)}{n}$.

**Q. 36** De nouveau, par utilisation des suites, on démontre que $C'$ est fermé puisque la norme et le produit scalaire, en dim finie, sont continues. Il est évidemment borné. Et on retrouve le raisonnement précédent sur l'obtention d'un maximum pour une fonction continue.

**Q. 37** On décompose $U$ sur la base des vecteurs propres. Comme $U$ est orthogonal à $U_0$, $U$ ne s'exprime qu'en utilisant les vecteurs propres associés à $\lambda_2$ jusqu'à $\lambda_n$. Un raisonnement identique à celui de Q14 fournit $\lambda_2$ comme valeur du maximum et donc $U_1$ est un vecteur propre unitaire associé à $\lambda_2$.

**Q. 38** On pose $M = (U_0, U_1)^T$ et d'après Q17, $\Sigma_Z = M\Sigma_Y(U_0, U_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ par orthogonalité et valeurs propres.
Les valeurs nulles représentent justement $\mathrm{cov}(U_0^T, U_1^T)$.