L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit. Le sujet se compose de deux problèmes.

Problème 1 : Le but de ce problème (tiré de Maths 1 Mines Ponts 2024 MP) est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\, dt$$

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0,1[$ fixé.

1 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$, la fonction f définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} \end{array} \right.$$

est définie et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} dt \end{array} \right.$$

2 ▷ Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]-\pi,\pi[, \quad r'(\theta) = -ie^{i\theta}. \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+te^{i\theta})^2}\, dt$$

Indication : soit $\beta \in]0,\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta;\beta]$ et $t \in [0,+\infty[$,
$\left|1+te^{i\theta}\right|^2 \geqslant \left|1+te^{i\beta}\right|^2 = (t+\cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$.

Soit g la fonction définie par

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{ix\theta}. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+te^{i\theta}} dt \end{array} \right.$$

3 ▷ Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi,\pi[$,

$$g'(\boldsymbol{\theta}) = ie^{ix\boldsymbol{\theta}} \int_0^{+\infty} h'(t) dt$$

où h est la fonction définie par

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^x}{1+te^{i\theta}} \end{array} \right.$$

Calculer $h(0)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$.

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi,\pi[$.

4 ▷ Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2i}\left(g(-\theta)\mathrm{e}^{ix\theta} - g(\theta)\mathrm{e}^{-ix\theta}\right) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\theta)+1}\,dt$$

5 ▷ En déduire que :

$$\forall\theta\in\,]0,\pi[\,,\quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}(\theta)}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,du,$$

où $\mathrm{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

6 ▷ Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta\to\pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

7 ▷ En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0,1[$ fixé.

8 ▷ Montrer que.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)dt$$

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

10 ▷ établir l'identité

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

11 ▷ En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}$$

12 ▷ En déduire enfin que :

$$\forall y\in\,]0;\pi[\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 ▷ Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,dt = (2p+1)\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

14 $\triangleright$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\ dt$$

15 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right) dt$$

16 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\ dt$$

Quel résultat bien connu obtient-on pour $p = 0$?

17 $\triangleright$ Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos(2(p-k)t)\right)$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 $\triangleright$ En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\ dt = \frac{\pi\ (2p+1)!}{2^{2p+1}\ (p!)^2}$$

Problème 2 : la formule des compléments

I **1)** Soit a un réel strictement positif, on pose pour tout x réel positif, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$u_0(x) = 1$

et pour $k \geqslant 1$, $\begin{cases} u_k(x) = 0 \text{ pour } x \in [0,k] \\ u_k(x) = \dfrac{x(x-1)...(x-k+1)}{x^k}\dfrac{a^k}{k!} \text{ pour } x > k. \end{cases}$.

Montrer que la série de fonctions : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ converge simplement puis normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2) En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

3) On considère la suite de fonctions f_n de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f_n(z) = \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

En développant à l'aide de la formule du binôme, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

II **1)** Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\sin x = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\dfrac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2i}$$

2) On pose $P(X) = (1+X)^{2n+1} - (1-X)^{2n+1}$.

Montrer que $P(X) = 2(2n+1)X \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{X^2}{\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right)$.

3) En déduire que $\sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} \right) \right)$

4) Soit $a \in]0,1[$ fixé, on pose pour $k \geqslant 1$, $\begin{cases} v_k(t) = 0 \text{ pour } t \in [0, 2k] \\ v_k(t) = \ln \left(1 - \dfrac{a^2}{t^2 \tan^2(\frac{k\pi}{t})} \right) \text{ pour } t > 2k. \end{cases}$.

a) Montrer que $u^2 \leqslant \tan^2(u)$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que v_k est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que la série de fonctions $\sum v_k(t)$ converge simplement.

d) En déduire que la série de fonctions $\sum v_k(t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

e) En utilisant le théorème de la double limite, montrer [1]

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$$

III Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}$.

On rappelle (il n'est donc pas nécessaire de le redémontrer) que $\Gamma(x)$ est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1) Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n t^{x-1} dt$.

2) En déduire que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

3) Pour $x \in]0,1[$, montrer la formule des compléments :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

4) Applications :

a) Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$. Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

b) La fonction $\ln \Gamma$ est-elle intégrable sur $]0,1[$? Si oui, la calculer.

IV On note $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, la constante d'Euler.

1) Montrer, à partir de la question III : 3), et en en justifiant l'écriture, la formule de Weierstrass :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + \frac{x}{k}) e^{-x/k}$$

2) En déduire que $\forall\, x \in]0,1]$, $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\dfrac{1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x}{k\,(k+x)}$

3) En déduire, après en avoir montré l'existence, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}\, dt$. **FIN**

1. Cette formule, ainsi que celle de la partie I, ont été établies par Léonard Euler dans son *Introductio in analysin infinitorum* en 1748.