

Largement inspiré de Mines Ponts 2019 Maths 2 PC

Étude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x .
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

1 Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ est convergente.

2 Calcul de I

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt} dt$. Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
4. On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $\varphi(0)$.
5. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{2(x+i)} y = 0$$

6. En déduire l'expression de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

7. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

8. En déduire I .

9. Montrer que l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3 Étude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

Pour tout $h > 0$, on pose :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

1. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_h : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que $S(h) = \int_0^{+\infty} \varphi_h(t) dt$.

2. Montrer que, pour tous $h \in]0; 1]$ et $t \in [1; +\infty[$, on a :

$$|\varphi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

3. En déduire que

$$S(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

4. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

4 Transformée de Fourier

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que f, f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5 Formule sommatoire de Poisson

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.

Si u est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on pose, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-ipt} dt.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad |\hat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2}.$$

On pose également, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

1. Montrer que la fonction F est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction G est bien définie, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2n\pi).$$

4. Montrer que, pour tout réel strictement positif a , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson*.

6 Étude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ i & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans le redémontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

2. Établir que $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \rightarrow \pm\infty$.

3. Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

On pose à présent, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2 x}}{n^2}.$$

4. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que $F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2})$ quand $x \rightarrow 0$ par valeurs strictement positives.

Préciser la valeur de b , et exprimer a en fonction de J .

5. Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x + \pi)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.
6. Dédire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π , et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

FIN