



# Mathématiques 1

PSI

4 heures

2025

## Conditionnement d'une matrice et applications

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes. On note  $D_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par  $M^\top$  la transposée d'une matrice  $M$ .

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  aux matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On désignera par  $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|$ , en posant pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  qui est la norme euclidienne

associée au produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^n$  où par définition, pour tout  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ .

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on note  $\rho(M)$  le réel défini par :  $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_c(M)} |\lambda|$ .

On note par ailleurs  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et par  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## Partie A – Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose dans cette partie de montrer que l'application  $N$  donnée sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$N : A \longmapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et d'en étudier quelques propriétés.

### I – Étude de l'application $N$

Dans toute cette partie, on considère  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont on note  $L_1, L_2, \dots, L_n$  les  $n$  lignes et  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les  $n$  colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de  $\mathbb{R}^n$ .

**Q1.** Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|X\| = 1$ . En notant  $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|$ , montrer que :

$$\|AX\| \leq M\sqrt{n}.$$

On pourra au préalable s'intéresser à la  $i^{\text{e}}$  ligne de la matrice  $AX$  et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

**Q2.** En déduire que l'application  $N$  est bien définie, puis que :  $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$ .

**Q3.** Montrer que l'application  $N$  ainsi définie est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q4.** En est-il de même pour l'application  $S : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ M & \longmapsto \rho(M) \end{cases}$  ?

**Q5.** Soit  $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$  dont on note  $\delta_1, \dots, \delta_n$  les termes diagonaux.

Vérifier que  $N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$ .

**Q6.** À l'aide de l'application  $X \mapsto \|AX\|$ , démontrer que :  $N(A) = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$ .

**Q7.** Établir que :  $\forall X \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|AX\| \leq N(A)\|X\|$ .

**Q8.** Soit  $B$  une autre matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

**Q9.** Montrer que :  $\max_{1 \leq i \leq n} \|C_i\| \leq N(A)$ .

**Q10.** Déterminer  $N(A)$  dans le cas où toutes les colonnes de  $A$  sont nulles, sauf la dernière.

En déduire  $N(A)$  dans le cas où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## II – Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie,  $A$  désigne une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $U$  une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q11.** Déterminer  $N(U)$ .

**Q12.** Démontrer que  $N(UA)$  et  $N(A)$  sont égales.

**Q13.** En considérant  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  où  $\|X_0\| = 1$  tel que  $\|AX_0\| = N(A)$ , démontrer que  $N(AU) = N(A)$ .

**Q14.** On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice  $A$  est une matrice symétrique réelle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que :  $N(A) = \rho(A)$ .

**Q15.** Déterminer  $N(A)$  dans le cas où  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## Partie B – Conditionnement d'une matrice pour la norme $N$

On définit sur  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  l'application notée  $\mathrm{cond}$  par : 
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{cond} : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto N(A)N(A^{-1}) \end{array}$$

### I – Quelques résultats sur le conditionnement

Dans toute cette sous-partie,  $A$  désigne une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $U$  une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q16.** Montrer que :  $1 \leq \mathrm{cond}(A)$ .

**Q17.** Quel lien a-t-on entre  $\mathrm{cond}(A)$  et  $\mathrm{cond}(\alpha A)$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  ?

**Q18.** Démontrer que  $\mathrm{cond}(U) = 1$ .

**Q19.** Que dire de  $\mathrm{cond}(UA)$ ,  $\mathrm{cond}(AU)$  et de  $\mathrm{cond}(A)$  ?

### II – Un exemple de minoration du conditionnement d'une matrice

On suppose dans cette partie uniquement que  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  où :  $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

**Q20.** On considère le vecteur  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  donné par :  $X = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} 2^{n-k} E_k$ .

Montrer que  $AX = E_n$ .

**Q21.** Déduire de ce qui précède que  $N(A^{-1}) \geq 2^{n-1}$ .

**Q22.** Justifier  $\|AE_2\| > 2$ , pour en déduire que  $\mathrm{cond}(A) > 2^n$ .

## Partie C – Conditionnement pour une matrice réelle inversible

**Q23.** Soit  $S$  une matrice de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

On considère  $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_n)$  une base diagonalisante orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  où pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $V_i$  est un vecteur propre associé à la valeur propre notée  $\lambda_i$  et où l'on suppose que  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $S$  comptées avec leur ordre de multiplicité.

Montrer que :  $N(S) = \max_{\|X\|=1} |\langle SX, X \rangle|$ .

**Q24.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non nulle.

Démontrer que la matrice  $A^\top A$  appartient à  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  pour établir que  $N(A^\top A) = N(A)^2$ .

**Q25.** Déduire de ce qui précède que pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non nulle :  $N(A) = \sqrt{\rho(A^\top A)}$ .

**Q26.** On suppose dans cette question que  $A$  est une matrice  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible.

En remarquant que  $A^\top A = A^{-1}AA^\top A$ , démontrer que les matrices  $AA^\top$  et  $A^\top A$  ont exactement les mêmes valeurs propres.

**Q27.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible. On note  $\mu_m$  et  $\mu_M$  respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice  $A^\top A$  et où l'on suppose que l'on a  $0 < \mu_m \leq \mu_M$ .

Montrer que :  $\text{cond}(A) = \sqrt{\frac{\mu_M}{\mu_m}}$ .

**Q28.** Exprimer  $\text{cond}(A)$  lorsque  $A$  appartient à  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  à l'aide des valeurs propres de  $A$  en remarquant que  $A^\top A = A^2$ .

## Partie D – Calcul explicite de conditionnement

Dans toute cette partie, on désigne par  $T$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donnée par :  $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de  $\text{cond}(T)$  en commençant par déterminer les éléments propres de la matrice  $T$ .

**Q29.** Montrer que les valeurs propres de  $T$  sont réelles.

**Q30.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$ . On considère le vecteur  $U_k$  de  $\mathbb{R}^n$  donné par :

$$U_k = \left( \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{(n-1)k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \right).$$

Montrer que  $U_k$  est un vecteur propre de  $T$  et préciser la valeur propre associée.

**Q31.** En déduire l'ensemble des valeurs propres de  $T$ .

**Q32.** Déterminer alors la valeur de  $\text{cond}(T)$ .

## Partie E – Inégalité de Kantorovich

Dans toute cette partie,  $A$  désigne une matrice de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et on désigne par  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  l'ensemble de ses valeurs propres où l'on suppose que  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  et comptées avec leur ordre de multiplicité, et on désigne par  $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_n)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

On se propose d'établir le résultat suivant, appelée inégalité de Kantorovich :

$$(K) : \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{\text{cond}(A)}} + \sqrt{\text{cond}(A)} \right)^2 \|X\|^4.$$

On désigne par  $P$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  donné par  $P = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)X + \lambda_1\lambda_n$ .

**Q33.** Exprimer  $\text{cond}(A)$  à l'aide des valeurs propres de  $A$ .

**Q34.** On admet que l'application  $(\cdot, \cdot)_A : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto \langle AX, Y \rangle \end{cases}$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ .

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que :  $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle$ .

**Q35.** Montrer que :  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(\lambda_k) \leq 0$ .

**Q36.** Déterminer les valeurs propres de la matrice  $B = A^{-1}P(A)$  et en déduire que  $\langle BX, X \rangle \leq 0$  pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ .

**Q37.** Pour  $X \in \mathbb{R}^n$  fixé, on désigne par  $f$  la fonction polynôme de degré 2 définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto \langle AX, X \rangle \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 \lambda + \lambda_1 \lambda_n \langle A^{-1}X, X \rangle \end{cases}$$

Vérifier que  $f(1) = \langle BX, X \rangle$ , montrer que  $f(0)f(1) \leq 0$ , puis établir que :

$$(*) : (\lambda_1 + \lambda_n)^2 \|X\|^4 - 4 \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \lambda_1 \lambda_n \geq 0.$$

**Q38.** Déduire de ce qui précéde l'inégalité de Kantorovich.

### Exercice :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ ev de dimension finie.

Montrer que si  $O_1, \dots, O_p$  sont des ouverts denses de  $E$  alors  $\bigcap_{i=1}^n O_i$  est un ouvert dense de  $E$ .

2. 1ère application :

(a) Montrer que  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et qu'il est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(b) En déduire qu'il existe une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que, pour n'importe quelle permutation de ses  $n^2$  coefficients, on obtienne toujours une matrice inversible.

3. 2ème application

(a) Soit  $F$  un sev strict de  $E$  (i.e. tel que  $F \neq E$ ).

Montrer que le complémentaire de  $F$  :  $O = F^c = E \setminus F$  est un ouvert dense de  $E$ .

(b) En déduire que si une union finie de sev de  $E$  est un sev alors l'un contient tous les autres.