Premier problème

I Première partie : décomposition L.U.

1) Supposons qu'il y ait deux décompositions $M = L\,U = L'\,U'$.
On a alors $L'^{-1}L = U'U^{-1}$. Or nous savons que $T_n^+(\mathbb{R})$ (et il en va de même pour $T_n^-(\mathbb{R})$) est une sous-algèbre et que si une matrice triangulaire supérieure est inversible alors son inverse est également triangulaire supérieur. Par ailleurs, les coefficients diagonaux de U^{-1} sont les inverses des coefficients diagonaux de U, donc sont tous égaux à 1.
Si l'on note donc $A = L'^{-1}L = U'U^{-1}$, alors A est une matrice à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure, donc c'est une matrice diagonale, et ses coefficients diagonaux sont égaux à 1.
Par conséquent $A = I_n$, ce qui implique $L = L'$ et $U = U'$, d'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.

2) Si $M = T_-\Delta T_+$ alors posons $L = T_-\Delta$, c'est une matrice de $T_n^-(\mathbb{R})$, et on a bien $M = L\,U$ avec $L \in T_n^-(\mathbb{R})$ et $U \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que les coefficients diagonaux de U soient tous égaux à 1. Par conséquent, M admet une décomposition $L.U$.

3) Réciproquement, on suppose l'existence de la décomposition $L\,U$.
Notons $(a_1, ..., a_n)$ les coefficients diagonaux de L.
On peut décomposer L en une matrice diagonale $D = \text{diag}(a_1, ..., a_n)$ et T_- une matrice de $T_n^-(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1. Posons $U = T_+$, on a donc $M = T_-DT_+$.
Montrons à présent que les coefficients de D sont $\Delta_1, \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, ..., \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.
Effectuons pour cela le calcul de $L\,U$ par blocs :

$$L = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ (...) & & a_k & & & \\ \hline & & & a_{k+1} & & \\ & (\times) & & & \ddots & \\ & & & (...) & & a_n \end{array}\right) \text{ et } U = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & (...) & & & \\ & \ddots & & & (\times) & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & (...) \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)$$

On voit ainsi que le bloc en haut à gauche, i.e. M_k (bloc (1,1)) est le produit des deux blocs (1,1) de L et de U.
Il s'ensuit que le mineur principal de M d'ordre k est le produit des déterminants des blocs (1,1) de L et de U.
On a donc $\Delta_k = a_1 \times ... \times a_k$.
Il s'ensuit que $a_1 = \Delta_1$, $a_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, ..., a_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.
Et on a $M = T_-\Delta T_+$.

4) Montrons que si M admet une décomposition $T_-\,\Delta\,T_+$ alors cette décomposition est unique.
Supposons que $M = T_-\,\Delta\,T_+ = T'_-\,\Delta'\,T'_+$.
Alors en posant $L = T_-\,\Delta, U = T_+, L' = T'_-\,\Delta', U' = T'_+$, on a $M = LU = L'U'$. Or l'unicité de la décomposition LU a été établie dans la question 1.
On a donc $L = L'$ et $U = U'$, ce qui implique $T_+ = T'_+$.
Par ailleurs, d'après la question 3) , les coefficients de Δ sont déterminés par la valeur des mineurs principaux de M donc $\Delta = \Delta'$.
Pour finir, si $\Delta = \Delta'$ qui sont des matrices inversibles alors $T_- = T'_-$.

5) **a)** Pour $n = 1$, si $M = [a_1]$ alors $M = [1]\,[a_1]\,[1]$ et la décomposition est unique.

b) On suppose le résultat acquis au rang $n - 1$.

Montrons l'existence de la décomposition $M = L\,U$, l'unicité ayant été démontrée dans la question 1).

Considérons $N = M_{n-1}$, la matrice extraite de M, formée des $n-1$ premières lignes et des $n-1$ premières colonnes. Les mineurs principaux de N sont ceux de M donc N vérifie les hypothèses du théorème, et on peut donc écrire $M = L'U'$ avec $L' \in T^-_{n-1}(\mathbb{R})$ et $U' \in T^+_{n-1}(\mathbb{R})$ avec des coefficients diagonaux égaux à 1.

On cherche à présent à écrire M sous la forme $L\,U$ avec L et U de la forme donnée par l'énoncé.

Calculons $L\,U = \left(\begin{array}{c|c} L' & 0 \\ \hline \ell & b \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} U' & c \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L'U' & L'c \\ \hline \ell U' & \ell c + b \end{array}\right)$

Par identification, on a : $N = L'U'$, $\quad \ell U' = (m_{n,1}, ..., m_{n,n-1})$, $\quad L'c = (m_{1,n}, ..., m_{n-1,n})^T$, $\quad \ell c + b = a_{n,n}$.

Comme N est inversible, il en va de même de L' et U', ce qui garantit l'existence de ℓ et de c, il s'ensuit, grâce à la dernière relation, celle de b.

6) Le système $MX = B$ s'écrit donc $LUX = B$ ou encore $LY = B$ en posant $Y = UX$.
On se ramène donc à la résolution de deux systèmes triangulaires, plus simples à résoudre.

II Deuxième partie

1) a) i) $\mathrm{Im}(p_k) = F_k$ donc $p_k \circ u$ stabilise F_k.

ii) Soient x et y, deux vecteurs de F_k calculons $(v_k(x)|y) = (p_k \circ u(x)|y) = (u(x)|p_k(y))$ car p_k, en tant que projecteur orthogonal, est un endomorphisme autoadjoint.
Or $p_k(y) = y$ car $y \in F_k$, et u étant également un endomorphisme autoadjoint, on a $u(x)|y) = (x|u(y)) = (p_k(x)|u(y)) = (x|p_k \circ u(y)) = (x|v_k(y))$.
Conclusion : $\boxed{v_k \text{ est un endomorphisme autoadjoint.}}$

iii) Il se trouve que la matrice de v_k dans la base $(e_1, ..., e_k)$ de F_k est précisément la matrice A_k, extraite de A et composée des k premières colonnes et k premières lignes de A.
Or v_k étant un endomorphisme symétrique, est diagonalisable dans une base orthonormée par le théorème spectral.
Soit donc λ une valeur propre de v_k et x un vecteur propre unitaire associé.
$v_k(x) = \lambda x$, par conséquent $(v_k(x)|x) = \lambda$.
Par ailleurs, $(v_k(x)|x) = (p_k \circ u(x)|x) = (u(x)|p_k(x)) = (u(x)|x) > 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de v_k sont toutes strictement positives. Or, comme v_k est diagonalisable, son déterminant est le produit des valeurs propres, il est donc strictement positif. On en conclut que $\boxed{\Delta_k > 0}$.

b) On suppose à présent que $\forall k \in [\![1, n]\!], \Delta_k > 0$.
D'après la première partie : $A = T_- \Delta T_+$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\Delta_1, \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, ..., \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}})$.
Comme A est symétrique réelle, si on transpose cette décomposition, par unicité de la décomposition, on obtient $T_- = T_+^T$, et donc $A = T_+^T\,\Delta T_+$.
Pour montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, nous allons montrer que pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, $X^TAX > 0$.
On a $X^TAX = X^T\,T_+^T \Delta T_+ X = Y^T \Delta Y$ en posant $Y = T_+X$. Remarquons que, puisque T_+ est inversible et que X est non nul, alors Y est non nul également.
Le calcul donne alors $Y^T\Delta Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} y_k^2$ en posant $\Delta_0 = 1$.
Par hypothèse, tous les Δ_k sont strictement positifs et l'un au moins des y_k est non nul, on peut donc affirmer en toute légitimité que $X^TAX > 0$ et que donc $\boxed{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$.

2) a) Posons $M_n(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & & & t^{n-1} \\ t & 1 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ t^{n-1} & & & t & 1 \end{pmatrix}$

L'idée est ici, bien évidemment, d'appliquer le critère de Sylvester. On remarque que le calcul des mineurs principaux de $M_n(t)$ revient à calculer les déterminants de $M_k(t)$ pour $1 \geqslant k \geqslant n$.

Si l'on écrit $M_{k+1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & & & t^k \\ t & 1 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ t^k & & & t & 1 \end{pmatrix}$ et que l'on effectue l'opération suivante sur la dernière colonne :

$C_{k+1} \leftarrow C_{k+1} - tC_k$ alors

$$\det M_{k+1}(t) = \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^{k-1} & 0 \\ t & 1 & \dots & t^{k-1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ t^{k-1} & & & 1 & 0 \\ t^k & & & t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t^2)\det M_k(t)$$

L'initialisation est immédiate car $\det M_1(t) = 1$. On en déduit car au critère de Sylvester que $M_n(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \forall t \in]0,1[$.

b) La matrice A s'obtient en intégrant tous les coefficients de $M_n(t)$ entre 0 et 1.

On peut donc écrire $A = \displaystyle\int_0^1 M_n(t)\mathrm{dt}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash 0$, calculons $X^TAX = \displaystyle\sum_{i,j} x_i x_j a_{ij} = \sum_{i,j} x_i x_j \frac{1}{|i-j|+1} = \sum_{i,j} x_i x_j \int_0^1 t^{|i-j|}\mathrm{dt}$.

Par conséquent, $X^TAX = \displaystyle\int_0^1 \sum_{i,j} x_i x_j t^{|i-j|}\mathrm{dt} = \int_0^1 X^T M_n(t) X \mathrm{dt} > 0$ car on intégre une fonction qui est strictement positive sur $]0,1[$.

On en déduit que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3) Décomposition de Cholesky

Existence : D'après la question précédente, $A = {}^tT_+ \Delta T_+$.

Notons, pour simplifier l'écriture, $\Delta = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$. D'après la question 2) les coefficients $a_1, ..., a_n$ sont tous strictement positifs. Posons donc $D = \mathrm{diag}(b_1, ..., b_n)$ où $b_i = \sqrt{a_i}$.

On a donc $A = {}^tT_+ D^2 T_+ = {}^tB\ B$ avec $B = DT_+$.

Et B est bien une matrice de $T_n^+(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux, $b_1, ..., b_n$, sont strictement positifs.

Unicité :

Raisonnons par condition nécessaire :

Si $A = {}^tB\ B$ avec $B \in T_n^+(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux $b_1, ..., b_n$ sont tous positifs, alors on note que, A étant inversible, les coefficients diagonaux en question sont strictement positifs.

On peut donc écrire $B = \mathrm{diag}(b_1, ..., b_n)T$ avec T qui est une matrice de $T_n^+(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

On a donc $A = {}^tT\,\mathrm{diag}(b_1^2, ..., b_n^2)T$, or d'après la question précédente et le critère de Sylvester, comme A est dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors ses mineurs principaux sont non nuls, le resultat de la première partie peut donc s'appliquer : on a unicité de la décomposition $A = LU$.

Par identification, $T = U$ et $T\,\mathrm{diag}(b_1^2, ..., b_n^2) = L$, donc $\mathrm{diag}(b_1^2, ..., b_n^2) = U^{-1}L$. Par conséquent, la matrice T et les coefficients $b_1, ..., b_n$ sont entièrement déterminés par les matrices L et U.

On a donc bien l' $\boxed{\text{unicité de la décomposition de Cholesky}}$.

Deuxième problème

Centrale – Supélec, 2001
Mathématiques I, PC

I **1)** D'une part $(e^x-1)^m = (x+o(x))^m = x^m + o(x^m)$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}(e^x-1)^m &= (-1)^m + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}e^{kx}\\ &= (-1)^m + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{k^j}{j!}x^j + o(x^m)\right)\\ &= (-1)^m + \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}\left(\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j\right) + o(x^m)\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un DL on obtient le résultat demandé.

2) Pour $k<n$ on a : $(u_1...u_n)^k - (u_1...u_k)^n = (u_1...u_k)^k[(u_{k+1}...u_n)^k - (u_1...u_k)^{n-k}] \geq 0$ car d'une part $(u_{k+1}...u_n)^k \geq (u_k^{n-k})^k$ et d'autre part $(u_1...u_k)^{n-k} \leq (u_k^k)^{n-k}$ puisque la suite (u_k) est croissante.

II **1)** **a)** Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor avec reste intégral(e) donne :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h}(x+h-t)f''(t)\mathrm{d}t$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \int_x^{x-h}(x-h-t)f''(t)\mathrm{d}t$$

Si l'on soustrait ces deux égalités, on obtient :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \int_x^{x+h}(x+h-t)f''(t)\mathrm{d}t - \int_x^{x-h}(x-h-t)f''(t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne :

$$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) - \int_x^{x+h}(x+h-t)f''(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x-h}(x-h-t)f''(t)\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$|2hf'(x)| \leqslant |f(x+h)| + |f(x+h)| + |\int_x^{x+h}(x+h-t)M_2\mathrm{d}t| + |\int_x^{x-h}(x-h-t)M_2\mathrm{d}t|$$

ce qui implique

$$|2hf'(x)| \leqslant 2M_0 + 2\frac{h^2}{2}M_2$$

d'où le résultat en divisant par $2h>0$.

b) La fonction définie par $v(h) = \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$ a pour dérivée $v'(h) = \dfrac{M_2h^2 - 2M_0}{2h^2}$ qui s'annule pour $h_0 = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$.
On obtient

$$|f'(x)| \leqslant v(h_0) = \sqrt{2M_0M_2}$$

2) **a)** On applique de même la formule de Taylor avec reste intégral(e) à l'ordre 3 entre x et $x+h$ puis entre x et $x-h$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^2}{2}f'''(t)\mathrm{d}t$$

et
$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\int_x^{x-h}\frac{(x-h-t)^2}{2}f'''(t)\mathrm{d}t$$
En soustrayant à nouveau :
$$2hf'(x)=f(x+h)-f(x-h)-\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^2}{2}f'''(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x-h}\frac{(x-h-t)^2}{2}f'''(t)\mathrm{d}t$$
On majore en valeur absolue :
$$|2hf'(x)|\leqslant 2M_0+|\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^2}{2}M_3\mathrm{d}t|+|\int_x^{x-h}\frac{(x-h-t)^2}{2}M_3\mathrm{d}t|$$
ce qui donne :
$$|2hf'(x)|\leqslant 2M_0+2\frac{h^3}{6}M_3$$
d'où :
$$|f'(x)|\leqslant\frac{M_0}{h}+\frac{h^2}{6}M_3$$
La fonction définie par $w(h)=\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{M_3h^2}{6}$ a pour dérivée $w'(h)=\dfrac{M_3h^3-3M_0}{3h^2}$ qui s'annule pour $h_0=\left(\dfrac{3M_0}{M_3}\right)^{1/3}$. On obtient $|f'(x)|\leqslant w(h_0)=\dfrac{1}{2}(9M_0^2M_3)^{1/3}$.

b) f' et $f^{(3)}$ étant bornées sur $\mathbb{R}$, la question II.1.a.(ii) entraine que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$.

III **1)** La formule de Taylor avec reste intégral(e) s'écrit :
$$f(x+h)-f(x)-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j=\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$
d'où par inégalité triangulaire :
$$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leqslant\frac{M_nh^n}{n!}+2M_0$$
A présent, on écrit cette inégalité pour h variant de 1 à $n-1$ en la multipliant par $(-1)^h\binom{n-1}{h}$ (le $(-1)^h$ n'a pas d'incidence car il est "neutralisé" par la valeur absolue). On obtient :
$$\left|\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\binom{n-1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leqslant\sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h}\left(\frac{M_nh^n}{n!}+2M_0\right)$$
Permutons les deux sommes :
$$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\binom{n-1}{h}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leqslant\left(\sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h}\frac{h^n}{n!}\right)M_n+2\left(\sum_{h=1}^{n-1}\binom{n-1}{h}\right)M_0$$
$$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\binom{n-1}{h}h^j\right)\frac{f^{(j)}(x)}{j!}\right|\leqslant C_1M_n+C_2M_0$$
où C_1 et C_2 sont des constantes.
Si l'on utilise les relations de I.1) pour $m=n-1$, il vient :
$$|f^{(n-1)}(x)|\leqslant C_1M_n+C_2M_0$$
$f^{(n-1)}$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Il suffit d'appliquer la question précédente à f et $f^{(k)}$ pour k de $n-1$ à 1.

3) **a)** $M_k = 0$ entraine $f^{(k)} = 0$ d'où f est une fonction polynôme. f étant bornée, il en résulte que f est constante ce qui est exclu par hypothèse. On a donc $M_k > 0$.

b) $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = 2\dfrac{M_{k+1}M_{k-1}}{M_k^2} \geqslant 1$ d'après la question II.1.b) appliquée à $f^{(k-1)}$.

On peut donc utiliser la question I.2) qui donne en remplaçant les u_k :

$$\left(\frac{M_k}{M_0}\,2^{0+1+\ldots+(k-1)}\right)^n \leqslant \left(\frac{M_n}{M_0}\,2^{1+\ldots+(n-1)}\right)^k$$

d'où

$$M_k^n \leqslant M_n^k\,M_0^{n-k}\,2^{\frac{kn(n-1)}{2}-\frac{nk(k-1)}{2}}$$

d'où enfin

$$M_k \leqslant M_n^{\frac{k}{n}}\;M_0^{1-\frac{k}{n}}\;2^{\frac{k(n-k)}{2}}$$

Ce n'est pas la meilleure majoration pour $n = 3$ et $k = 1$ car le coefficient $\dfrac{9^{1/3}}{2} = 1,04...$ obtenu au II.2.a) est inférieur au 2 obtenu dans la formule précédente.

Exercice

a) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ soit antisymétrique.

b) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P(O)$ soit orthogonale.

---

a) Il faut commencer par distinguer le cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.
Pour $n = 1$, la seule matrice ansitymétrique 1×1 est la matrice nulle et pour que P vérifie la propriété voulue, il suffit d'avoir $P(0) = 0$.
Considérons à présent le cas $n \geqslant 2$.

Il est clair que si A est antisymétrique alors A^{2k+1} l'est également, puis, par linéarité, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_{2k+1}X^{2k+1}$, alors $P(A)$ est antisymétrique.
Montrons que ce sont les seuls polynômes qui vérfient la propriété voulue.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k X^k$ un polynôme, et soit A une matrice antisymétrique.

Alors $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor q/2\rfloor} a_{2k}A^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (q-1)/2\rfloor} a_{2k+1}A^{2k+1}$, la première somme est une matrice symétrique et la deuxième somme est une matrice antisymétrique.
On sait par ailleurs que les sev constitués par les matrices symétriques et les matrices antisymétriques sont supplementaires. Par conséquent, si $P(A)$ est antisymétrique alors cela signifie que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor q/2\rfloor} a_{2k}A^{2k} = 0 \quad (*)$.

Pour $n = 2$, considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ dont le carré vaut $A^2 = -x^2 I_2$.

La condition $(*)$ implique $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor q/2\rfloor} a_{2k}x^{2k} = 0$ pour tout x.

Il s'agit d'un polynôme qui a une infinité de racines, il est donc nul et tous ses coefficients sont nuls.
Conclusion : tous les coefficients pairs a_{2k} sont nuls et P n'est donc constitué que de termes de degré impair.
Pour $n \geqslant 3$, on peut se ramener au cas précédent en considérant la matrice par blocs

$$A = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & x & 0 & \ldots & 0 \\ -x & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

b) Là encore, il convient de distinguer le cas $n = 1$ et le cas $n \geqslant 2$.

Pour $n = 1$, les seules matrices orthogonales sont 1 et -1. Il faut donc $P(1) = \pm 1$ et $P(-1) = \pm 1$.

Pour $n \geqslant 2$, commençons par remarquer que si O est orthogonale alors O^p l'est aussi.

Par conséquent, si P est de la forme $\pm X^p$, alors P vérifie la propriété voulue.

Montrons qu'il n'y a pas d'autre polynôme solution.

Intéressons nous au cas $n = 2$. Si O est orthogonale, alors O est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (matrice spéciale orthogonale) ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (matrice orthogonale qui n'a rien de spécial).

Dans le premier cas, O a pour valeurs propres $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. En particulier O est diagonalisable et est donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, ce qui fait que $P(O)$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} P(e^{i\theta}) & 0 \\ 0 & P(e^{-i\theta}) \end{pmatrix}$.

Or une matrice orthogonale a pour valeurs propres des complexes de module 1.

On en déduit que $|P(e^{i\theta})| = 1$. Par conséquent P stabilise $\mathbb{U}$, l'ensemble des complexes de module 1.

Ceci renvoie à l'exercice 155 (incontournables de la feuille 3) corrigé en classe et dont nous redonnons ici la correction de la question a).

On note $P = a_0 + ... + a_p X^p$ où p est le degré de P, ce qui implique $a_p \neq 0$.

Pour tout z de module 1, on a $|P(z)| = 1$, ce qui équivaut à $P(z)\overline{P(z)} = 1$. Etant donné que $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$, on obtient $(a_0 + a_1 z + ... + a_p z^p)(a_0 + a_1 \dfrac{1}{z} ... + a_p \dfrac{1}{z^p}) = 1$

Ce qui équivaut à $(a_0 + a_1 z + ... + a_p z^p)(a_0 z^p + a_1 z^{p-1} ... + a_p) = z^p$.

Cette relation indique que le polynôme $(a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p)(a_0 X^p + a_1 X^{p-1} ... + a_p) - X^p$ admet une infinité de racines (tous les complexes de module 1). C'est donc le polynôme nul.

Le coefficient de degré $2p$ est nul, par conséquent $a_0 a_p = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$.

Puis le coefficient de degré $2p - 1$ est nul $\Longrightarrow a_1 = 0$ et ainsi de suite : $a_0 = ... = a_{p-1} = 0$ puis $a_p^2 = 1$.

Conclusion : On obtient en fin de compte $P = \pm X^p$.

Pour le cas $n \geqslant 3$, on se ramène au cas $n = 2$ en considérant la matrice par blocs :

$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & \dots & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & I_{n-2} & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R(\theta) & O \\ \hline O & I_{n-2} \end{array}\right)$ qui est bien orthogonale et pour laquelle on a $P(A) = \left(\begin{array}{c|c} P(R(\theta)) & O \\ \hline O & P(I_{n-2}) \end{array}\right)$

◊ ◊

◊