

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les résultats devront être encadrés.

Tout résultat (complément de cours, exercices incontournables ou autres) ne figurant pas textuellement au programme de PC doit être redémontré pour être utilisé.

Ce devoir se compose de deux problèmes et d'un exercice.

Premier problème

I Première partie : décomposition L.U.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note M_k la matrice extraite de M formée des k premières lignes et des k premières colonnes de M .

On appelle mineurs principaux Δ_k de M les déterminants des matrices M_k lorsque k varie entre 1 et n .

On cherche à établir le théorème suivant :

Décomposition L.U. Si $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ sont tous non nuls, alors il existe un unique couple de matrices (L, U) avec $L \in T_n^-(\mathbb{R})$ et $U \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que les coefficients diagonaux de U soient tous égaux à 1, et telles que $M = L \times U$. (Lower Upper)



- 1) **Unicité** : montrer que si cette décomposition existe alors les matrices L et U sont uniques.
- 2) Montrer que s'il existe un couple T_- et T_+ appartenant respectivement à $T_n^-(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et une matrice $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$ tels que

$$M = T_- \Delta T_+$$

alors M admet une décomposition LU .

- 3) Réciproquement, montrer que si M admet une décomposition LU alors il existe T_- et T_+ appartenant respectivement à $T_n^-(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 ainsi que $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$ tels que $M = T_- \Delta T_+$.

Montrer alors que $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}})$

- 4) Montrer que si M admet une décomposition du type de celle de la question 2) alors cette décomposition est unique.
- 5) On cherche à présent à montrer que M admet une décomposition LU par récurrence sur n .
 - a) Montrer le résultat pour $n = 1$.
 - b) On suppose le résultat acquis au rang $n - 1$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses,

Montrer que l'on peut écrire $M = L \times U$ avec L par blocs sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} L' & 0 \\ \hline \ell & b \end{array} \right)$ où $L' \in T_{n-1}^-(\mathbb{R})$,

$\ell \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$

et U sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} U' & c \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ où $U' \in T_{n-1}^+(\mathbb{R})$ avec des coefficients diagonaux égaux à 1 et $c \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$.

c) Conclure

- 6) Expliquer comment la décomposition LU permet de simplifier la résolution d'un système linéaire $MX = B$ où X et B sont deux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

II Deuxième partie Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

- 1) On veut montrer le résultat suivant, appelé critère de Sylvester¹ :

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Delta_k > 0$$

où $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ sont les mineurs principaux de A définis dans la première partie.

- a) On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On pose $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A et p_k le projecteur orthogonal sur F_k .

- i) Montrer que $p_k \circ u$ stabilise F_k .
- ii) Soit v_k l'endomorphisme de F_k induit par $p_k \circ u$. Montrer que v_k est un endomorphisme autoadjoint.
- iii) Montrer que $\Delta_k > 0$.

- b) On suppose à présent que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Delta_k > 0$.

En appliquant la décomposition de la première partie : $A = T_- \Delta T_+$ avec $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}})$, montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- 2) a) Montrer que $M(t) = \left((t^{|i-j|})\right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \forall t \in]0, 1[$.

b) En déduire que $A = \left(\left(\frac{1}{|i-j|+1}\right)\right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n} & & & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

3) Décomposition de Cholesky²

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une unique matrice $B \in T_n^+(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous positifs telle que $A = {}^t B B$.

1. James-Joseph Sylvester : 1814-1897 : mathématicien anglais. Les mathématiciens et leurs amis ont coutume de se réunir le 31 décembre au soir pour évoquer son souvenir.

2. André-Louis Cholesky : 1875-1918 : polytechnicien et officier français, ingénieur topographe et géodésien. Sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires est toujours intensément utilisée de nos jours. Mort pour la patrie pendant la guerre de 14-18.

Deuxième problème

- I** 1) Soit $m \geq 1$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction $(e^x - 1)^m$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est un entier entre } 1 \text{ et } m-1 \\ m! & \text{si } j = m \end{cases}$$

- 2) Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1 u_2 \dots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \dots u_n)^k$$

- II** 1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2 .

- a) En écrivant, pour $h > 0$, la formule de Taylor avec reste intégral(e) entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

- b) En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0 M_2}$.

2)

- a) Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^3$ telle que f et f''' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3 , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} (9M_0^2 M_3)^{1/3}.$$

- b) f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

III Dans cette partie, n est un entier naturel ≥ 2 .

Soit f une fonction, non constante, de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n .

- 1) En utilisant la partie I ainsi que Taylor + $\int$ à l'ordre n appliqué à f entre les valeurs x et $x+h$ pour $h = 1, 2, \dots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
- 2) En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.
- 3) a) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $M_k > 0$.
- b) En posant, pour $1 \leq k \leq n$, $u_k = 2^{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}}$, montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?

Exercice

- a) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ soit antisymétrique.
- b) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $P(O)$ soit orthogonale.

