Problème :

Partie I : Généralités

1. Il est clair que si $A = \lambda I_n$ alors $\varphi_A = 0$.
   Si $\varphi_A = 0$ alors $AM = MA, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, pour $M = E_{i,j}$ les matrices élémentaires de la base canonique, on obtient que tous les coefficients non diagonaux de la ligne i et de la colonne j sont nuls et que $a_{i,i} = a_{j,j}$. Puis, en faisant varier i et j dans $[\![1, n]\!]$, il vient que A est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.
2. (a) On trouve $\varphi_A^2(M) = A^2M - 2AMA + MA^2$ puis $\varphi_A^3(M) = A^3M - 3A^2MA + 3AMA^2 - MA^2$. Puis par une récurrence simple, analogue à celle pour établir la formule du binôme, on obtient :
   $$\varphi_A^p(M) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^(p-k) A^k M A^{p-k}$$
   (b) Par conséquent, si A est nilpotente d'indice p alors $\varphi_A^{2p}(M) = 0$ car dans chaque terme de la somme précédente, l'une des deux puissances de A qui encadrent M est nulle. On en déduit que φ_A est nilpotente.
3. Pour calculer la trace de φ_A, calculons la trace de sa matrice dans la base canonique. Pour cela, il faut déterminer la composante selon $E_{i,j}$ de $\varphi_A(E_{i,j)} = AE_{i,j} - E_{i,j}A$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
   Un calcul matriciel nous donne que ce coefficient vaut $a_{ii} - a_{jj}$.
   On en déduit que $\mathrm{tr}(\varphi_A) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (a_{ii} - a_{jj})$.
   $\boxed{\text{Conclusion } \mathrm{tr}(\varphi_A) = 0}$.

Partie II : Etude du cas $n = 2$.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$
   Remarque : on retrouve le resultat de I, à savoir que si $\varphi_A = 0$ alors sa matrice est la matrice nulle, ce qui entraîne : $b = c = 0$ et $a = d$.
2.
$$\begin{aligned}
\chi_{\varphi_A}(x) &= \det \begin{pmatrix} x & 0 & c & -b \\ 0 & x & -c & b \\ b & -b & x-a+d & 0 \\ -c & c & 0 & x-d+a \end{pmatrix} && C_1 \to C_1 + C_2 \text{ puis on factorise par } x \\
&= x \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & -b \\ 1 & x & -c & b \\ 0 & -b & x-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & x-d+a \end{pmatrix} && L_2 \to L_2 - L_1 \\
&= x \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & -b \\ 0 & x & -2c & 2b \\ 0 & -b & x-a+d & 0 \\ 0 & c & 0 & x-d+a \end{pmatrix} \\
&= x \det \begin{pmatrix} x & -2c & 2b \\ -b & x-a+d & 0 \\ c & 0 & x-d+a \end{pmatrix} \\
&= x^2 \left(x^2 - ((a-d)^2 + 4bc)\right) && (\textit{Sarrus})
\end{aligned}$$

   Si $(a-d)^2 + 4bc < 0$ alors φ_A admet 2 valeurs propres non réelles, donc n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.
   Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ alors $\chi_{\varphi_A}(x) = x^4$, donc φ_A est diagonalisable si et seulement si $\varphi_A = 0$ ce qui n'est

pas le cas par hypothèse.
Si $(a-d)^2+4bc>0$ alors φ_A admet deux valeurs propres réelles non nulles de multiplicité 1 et 0 comme valeur propre double. Donc $\dim \operatorname{Ker} \varphi_A \leqslant 2$ et φ_A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi_A$ est de dimension 2. Or I_2 et A appartiennent à $\operatorname{Ker} \varphi_A$ et sont linéairement indépendants par hypothèse. Donc $\dim \operatorname{Ker} \varphi_A \geqslant 2$ et par suite $\dim \operatorname{Ker} \varphi_A = 2$ et ainsi φ_A est bien diagonalisable.
Conclusion : $\boxed{\varphi_A \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable si et seulement si } (d-a)^2+4bc>0}$.

3. $\chi_A(X) = X^2-(a+d)X+ad-bc$ dont le discriminant a pour valeur $(d-a)^2+4bc$.
Si $(d-a)^2+4bc<0$, il n'y a pas de valeurs propres réelles donc A n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.
Si $(d-a)^2+4bc=0$ alors A admet une seule valeur propre λ d'ordre 2 donc n'est pas diagonalisable. En effet si elle l'était, elle serait semblable à λI_2 donc égale à λI_2 ce qui n'est pas par hypothèse.
Si $(d-a)^2+4bc>0$ alors A admet deux valeurs propres réelles distinctes donc est diagonalisable.
Ainsi $\boxed{\varphi_A \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable} \iff A \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable}}$.

Partie III : Etude du cas général

1. (a) A partir de la relation $A = PDP^{-1}$, on calcule $\varphi_A(B_{ij}) = AB_{ij} - B_{ij}A = P(DE_{ij}-E_{ij}D)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$
   (b) Comme l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les n^2 matrices $B_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi les matrices $B_{i,j}$ forment une base de vecteurs propres pour φ_A qui de ce fait est $\mathbb{R}$-diagonalisable.
   Le spectre de φ_A est l'ensemble $\boxed{\{\lambda_i-\lambda_j, (\lambda_i,\lambda_j) \in \operatorname{Sp}(A)^2\}}$.
2. (a) i. On a supposé que φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable, donc par définition, toutes ses valeurs propres sont réelles.
   ii. A et A^T ont le même polynôme caractéristique.
   iii. Calculons $\varphi_A(XY^T) = AXY^T - XY^TA = zXY^T - X\bar{z}Y^T = (z-\bar{z})XY^T$.
   De plus, X et Y sont des vecteurs colonnes non nuls, donc la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ XY^T est non nulle. Par conséquent, $z-\bar{z}$ est valeur propre de φ_A.
   iv. Si A admet une valeur propre complexe non réelle z alors, comme A est réelle (donc son polynôme caractéristique est à coefficients réels), $\bar{z}$ est également valeur propre de A. La question précédente peut donc s'appliquer et il en découle que φ_A admet une valeur propre imaginaire pure ce qui n'est pas puisque par hypothèse φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable.
   Ainsi si φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.
   v. De $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ et $AX = \lambda X$ on tire $AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda+\lambda_{i,j})P_{i,j}X$.
   vi. Comme $(P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que X est non nul,
   $\operatorname{Vect}(P_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \operatorname{Vect}(MX)_{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^n$. En effet l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(M) = MX$ est linéaire et surjective : si Y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$, il existe un endomorphisme transformant X en Y (comme $X \neq 0$ on peut le compléter en une base $\mathcal{B}$ et il suffit de considérer l'endomorphisme défini par le fait qu'il s'annule sur tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf en X transformé en Y).
   Donc il existe au moins n couples (i_k, j_k) tels que $(P_{i_k,j_k}X)_{1\leqslant k\leqslant n}$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
   La question précédente prouve alors que c'est une base de vecteurs propres de A.
   Ainsi $\boxed{\varphi_A \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable si et seulement si } A \text{ l'est}}$.
3. (a) Soit a un vecteur non nul de F et $(e_1, ..., e_p)$ une base de G, complétée en $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. L'endomorphisme v qui à e_i associe 0_E pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et à e_i associe a pour $p+1 \leqslant i \leqslant n$ vérifie :
   v non nul dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} v \subset F$ et $G \subset \operatorname{Ker} v$.
   Soient λ et λ' deux valeurs propres de u , posons $F = \operatorname{Ker}(u-\lambda Id_E)$, $F \neq 0$ car λ est valeur propre et posons $G = \operatorname{Im}(u-\lambda' Id_E)$, $G \neq E$ car λ' est valeur propre. Prenons v défini précédemment.
   On a bien v dans $\mathcal{L}(E)$ non nul tel que $u \circ v = \lambda v$ et $v \circ u = \lambda' v$.
   On a alors $\boxed{\varphi_u(v) = (\lambda-\lambda')v}$.
   (b) A, en tant que matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, il existe donc $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice $T = (t_{ij})$ de u est triangulaire supérieure. En particulier $u(e_1) = t_{11}e_1$.
   Or $\varphi_u(v) = \mu v \iff u\circ v - v \circ u = \mu v \iff u \circ v = v \circ (u + \mu Id_E)$.
   En particulier $u(v(e_1)) = v(u(e_1) + \mu e_1) = (t_{11}+\mu)v(e_1)$. Si $v(e_1) \neq 0$ alors $v(e_1)$ est vecteur propre de

u associé à $t_{11}+\mu$.
Si $v(e_1)=0$ alors $u(e_2)=t_{12}e_1+t_{22}e_2$ d'où $u(v(e_2))=v(u(e_2)+\mu e_2)=v(t_{12}e_1+t_{22}e_2+\mu e_2)=(t_{22}+\mu)v(e_2)$. Si $v(e_2)\neq 0$ alors $v(e_2)$ est vecteur propre de u associé à $t_{22}+\mu$.
Si $v(e_2)=0$ alors soit $j\in [\![1,n]\!]$ tel que $v(e_j)$ soit le premier vecteur non nul. Il en existe forcément un car v n'est pas l'endomorphisme nul (sinon v ne serait pas un vecteur propre). Le raisonnement fait avec $v(e_1)$ et $v(e_2)$ montre alors que $v(e_j)$ est vecteur propre de u associé à $t_{jj}+\mu$.

(c) De (a), on déduit que $\{(\lambda-\lambda'),(\lambda,\lambda')\in \mathrm{Sp}(u)^2\}\subset \mathrm{Sp}(\varphi_u)$.
De (b), on déduit que si μ est valeur propre de φ_u alors il existe $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $t_{jj}+\mu\in \mathrm{Sp}(u)$. Or $(t_{11},...,t_{nn})$ sont les valeurs propres de T, donc de u et par conséquent, μ peut s'écrire comme la différence de deux valeurs propres de u.
Conclusion : $\boxed{\{(\lambda-\lambda'),(\lambda,\lambda')\in \mathrm{Sp}(u)^2\}=\mathrm{Sp}(\varphi_u) \text{ et ce résultat vaut aussi pour } \varphi_A}$.

(d) Si $A=\lambda I_n+N$ où N est nilpotente, alors $\varphi_A(M)=\varphi_N(M)$ et d'après la partie I, φ_A est nilpotente.
Si φ_A est nilpotente, alors toutes ses valeurs propres sont nulles. Or d'après le résultat précédent, toutes les différences de 2 valeurs propres de A sont nulles, ce qui signifie que A ne possède qu'une seule valeur propre. En tant que matrice complexe, A est trigonalisable, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T qui a le même spectre que A, réduit ici à un singleton $\{\lambda\}$.
On peut donc décomposer $T=\lambda I_n+N$ où N est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente. Il s'ensuit que $A=PTP^{-1}=P(\lambda I_n+N)P^{-1}=\lambda I_n+PNP^{-1}$. Posons $N'=PNP^{-1}$. N' est nilpotente comme N et par conséquent A peut s'écrire comme la somme d'une matrice nilpotente et d'une matrice d'homothétie .

Partie IV : Etude du sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 0

1. On a vu dans le cours sur les matrices qu'il existe un polynôme annulateur de A en appliquant le lemme de Steinitz à la famille de cardinal n^2+1 : $(I_n,A,A^2,....,A^{n^2})$.
Par conséquent, l'ensemble $\{\deg P, P \text{ annulateur de } A\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide, il admet donc un plus petit élément.
C'est-à-dire que $\boxed{\text{il existe un polynôme annulateur de } A \text{ de degré minimal } m}$. Notons Q un polynôme annulateur de A de degré m.
2. Tout d'abord, $(I_n,A,...,A^{m-1})$ sont des polynômes en A donc appartiennent à $\mathbb{R}[A]$.
De plus, c'est une famille libre, car s'il existait une dépendance linéaire non triviale, alors il existerait un polynôme non nul annulateur de A de degré plus petit que m, ce qui ne peut pas être par hypothèse.
Montrons que c'est également une famille génératrice. Il est clair que la famille $(A^n,n\in\mathbb{N})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
Si l'on divise euclidiennement X^n par Q, on obtient $X^n=Q(X)S(X)+R(X)$ avec $\deg R\leqslant m-1$, ce qui implique : $A^n=Q(A)S(A)+R(A)=R(A)$ car $Q(A)=0$, or $R(A)\in \mathrm{Vect}(I_n,A,...,A^{m-1})$.
Par conséquent, $\mathrm{Vect}((A^n),n\in\mathbb{N})=\mathrm{Vect}(I_n,A,...,A^{m-1})$. La famille $(I_n,A,...,A^{m-1})$ est donc génératrice.
Conclusion : $\boxed{(I_n,A,...,A^{m-1}) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A]}$.
3. Tout polynôme en A commute avec A, ce qui se traduit par $\mathbb{R}[A]\subset \mathrm{Ker}\,\varphi_A$.
Par conséquent $\boxed{m\leqslant \dim \mathrm{Ker}\,\varphi_A}$.
4. (a) Question classique déjà démontrée à maintes reprises (TD, DS etc...)

   (b) Notons $w=\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. En vertu de la question précédente, pour prouver que $v=w$ il suffit d'établir que $v(ei)=w(ei)$ pour tout i de 1 à n, c'est à dire encore $v(u^k(y))=w(u^k(y))$ pour tout k de 0 à $n-1$.
Or par définition des α_i on a $v(y)=\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y)=w(y)$ (1) donc c'est bien vérifié pour $k=0$.
En outre, comme $B\in \mathrm{Ker}\,\varphi_A$, on a v qui commute avec u donc avec u^k et ainsi de (1) on tire pour k de 1 à $n-1$:
$$v(u^k(y))=u^k(v(y))=u^k(\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(y))=\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n+k-i}(y)=\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}(u^k(y))=w(u^k(y)).$$
Ainsi on a bien $\boxed{v=\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}}$.

(c) On a vu dans les questions précédentes que $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_{m-1}[A]$ est de dimension m et est toujours inclus dans $\operatorname{Ker} \varphi_A$.
La question précédente montre que lorsque A est nilpotente d'indice n alors $\operatorname{Ker} \varphi_A \subset \mathbb{R}_{m-1}[A]$.
Ainsi dans ce cas a-t-on $\boxed{\operatorname{Ker} \varphi_A = \mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_{m-1}[A]}$ et est donc de dimension m.

5. (a) $u \circ u = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. On sait de plus, par le théorème noyau-image que u induit un isomorphisme d'un supplémentaire du noyau dans l'image de u.
Notons donc G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. Soit également H un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans $\operatorname{Ker} u$.
On a donc $E = \operatorname{Ker} u \oplus G = \operatorname{Im} u \oplus H \oplus G$.
On remarque que par le théorème noyau-image déjà cité $\dim G = \dim \operatorname{Im} u = r$ et donc que $\dim H = n - 2r = s$.
Soit $(e_1', ..., e_r')$ une base de G alors $(u(e_1'), ..., u(e_r'))$ est une base de $\operatorname{Im} u$, soit $(e_{r+1}', ..., e_{r+s}')$ une base de H alors par le théorème de recollement, $\mathcal{B}' = (u(e_1'), ..., u(e_r'), e_{r+1}', ..., e_{r+s}', e_1', ..., e_r')$ est une base de E et $\operatorname{mat}(u)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$.

(b) $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A \Longleftrightarrow AB = BA \Longleftrightarrow u \circ v = v \circ u \Longleftrightarrow CD = DC$ où $D = \operatorname{mat}(u)_{\mathcal{B}'}$.
On écrit $D = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix}$. La relation $CD = DC$ équivaut à D de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}$.
Le nombre de coefficient arbitraires de cette matrice est égal à $r\,n + s\,(s+r) = n\,r + (n-2r)\,(n-r) = n^2 + 2\,r^2 - 2\,r\,n$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker} \varphi_A = (n-r)^2 + r^2$.
En posant $f_n(x) = 2\,x^2 - 2\,n\,x + n^2$, alors $f_n'(x) = 2\,(2\,x - n)$, donc f_n admet un minimum pour $x = \dfrac{n}{2}$ égal à $\dfrac{n^2}{2}$.
Conclusion $\boxed{\dim \operatorname{Ker} \varphi_A \geqslant \dfrac{n^2}{2}}$.

6. (a) $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$ si et seulement si A et B commutent, ce qui équivaut à u et v commutent.
Si u et v commutent alors on a vu en cours que les sous-espaces propres de u sont stables par v, i.e. $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v , pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$.
Réciproquement, si $E_{\lambda_k}(u)$ est stable par v , pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$ alors $u(v(x)) = v(u(x))$ pour tout $x \in E_{\lambda_k}$, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$.
Or, $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}(u)$ donc u et v commutent.
Par conséquent, $\boxed{B \in \operatorname{Ker} \varphi_A \text{ si et seulement si, } E_{\lambda_k} \text{ est stable par } v \text{ , pour tout entier } k \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant p}$.

(b) Donc $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$ si et seulement si, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, la matrice de v est une matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(C_1, C_2, ..., C_p)$ où C_k est une matrice carrée d'ordre m_k.

(c) Il en découle que $\boxed{d = \dim \operatorname{Ker} \varphi_A = \sum_{k=1}^{n} m_k^2}$.

(d)
- Si $p = 7$ alors $m_k = 1$ pour tout k et $d = 7$.
- Si $p = 6$ alors quitte à changer la numérotation on a $m_1 = 2$ et $m_k = 1$ pour $k > 2$ donc $d = 9$.
- Si $p = 5$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 1, 1, 1, 1)$ ou $(2, 2, 1, 1, 1)$ donc $d = 13$ ou $d = 11$.
- Si $p = 4$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (4, 1, 1, 1)$ ou $(3, 2, 1, 1)$ donc $d = 19$ ou $d = 15$.
- Si $p = 3$ alors $(m_1, m_2, m_3) = (5, 1, 1)$ ou $(4, 2, 1)$ ou $(3, 3, 1)$ ou $(3, 2, 2)$ donc $d = 27$ ou $d = 21$ ou $d = 19$ ou $d = 17$.
- Si $p = 2$ alors $(m_1, m_2) = (6, 1)$ ou $(5, 2)$ ou $(4, 3)$ donc $d = 37$ ou $d = 29$ ou $d = 25$.
- Si $p = 1$ alors $m_1 = 7$ et $d = 49$.

7. Un exemple lorsque A n'est pas diagonalisable :

(a) Le calcul donne $\chi_A(x) = (x-3)(x-2)^2$ par Sarrus par exemple. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est de dimension 1 et est dirigé par le vecteur $e_1 = (1, 1, 1)$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est également de dimension 1, ce qui fait que A n'est pas diagonalisable et est dirigé par le vecteur $e_2 = (4, 3, 4)$.

Il reste à trouver un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = 2e_3 + e_2$. La résolution du système donne par exemple $e_3 = (-2, 0, -1)$.

Par conséquent $A = PTP^{-1}$ avec P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Soit $M \in \operatorname{Ker} \varphi_T$. Le calcul matriciel donne que M est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Il est donc de dimension 3.

(c) L'application $\psi : M \mapsto P^{-1}MP$ est évidemment linéaire et bijective.
Si M commute avec A alors $AM = MA$ d'où $PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \iff TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \iff T\psi(M) = \psi(M)T$.
Donc $M \in \operatorname{Ker} \varphi_A \iff \psi(M) \in \operatorname{Ker} \varphi_T$, ce qui équivaut à $\operatorname{Ker} \varphi_A = \psi^{-1}(\operatorname{Ker} \varphi_T)$.
Conclusion : $\boxed{\text{la dimension de } \operatorname{Ker} \varphi_A \text{ est } 3}$.

(d) i. S'il existait un polynôme annulateur Q de A de degré inférieur ou égal à 2 , alors les valeurs propres de A seraient racines de Q donc Q serait forcément le polynôme $(X - 2)(X - 3)$ mais alors Q serait un polynôme annulateur scindé à racines simples et A serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

ii. Il est clair que $\operatorname{Vect} \{I_3, A, A^2\} \subset \operatorname{Ker} \varphi_A$. De plus la famille (I_3, A, A^2) est libre, sinon il existerait un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2. Donc par égalité des dimensions, on obtient $\boxed{\operatorname{Vect} \{I_3, A, A^2\} = \operatorname{Ker} \varphi_A}$.

iii. On a $\operatorname{Vect} \{I_3, A, A^2\} \subset \mathbb{R}[A]$ et $\mathbb{R}[A] \subset \operatorname{Ker} \varphi_A$, par conséquent : $\boxed{\mathbb{R}[A] = \operatorname{Ker} \varphi_A}$. Ce résultat n'est pas vrai pour $A = I_3$ par exemple.

Partie V : Etude du sous-espace propre de φ_A associé à une valeur propre non nulle

1. Montrons que $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$. Cette relation est vraie pour $k = 0$ et pour $k = 1$. En outre en supposant qu'elle soit vraie au rang $k \geqslant 1$, en remarquant que $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA)$, on obtient qu'elle est vraie au rang $k + 1$.
Ainsi $\varphi_A(B^k) = k\alpha B^k, \forall k \in \mathbb{N}$.
2. Par linéarité de φ_A on en déduit de suite que $\varphi_A(P(B)) = \alpha BP'(B)$.
3. En particulier avec $P = \Pi_B$ le polynôme minimal de B, il vient $\alpha B\Pi'_B(B) = 0$ donc $X\Pi'_B(X)$ annule B puisque $\alpha \neq 0$.
Donc $X\Pi'_B(X)$ est multiple de Π_B et comme il est de même degré que Π_B on a $X\Pi'_B = \lambda\Pi_B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
La considération des termes de degré d fournit alors $\lambda = d$.
Par conséquent $X\Pi'_B - d\Pi_B$ est le polynôme nul.
4. En écrivant que $\Pi_B(X) = X^d + \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$, la relation précédente fournit $(k - d)a_k = 0$ pour k de 0 à $d - 1$ donc $a_k = 0$. Ainsi $\Pi_B = X^d$ et donc $B^d = 0$. Si B est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de φ_A alors B est nilpotente.