0. Polynôme minimal d'une matrice

1. La famille $I_n, M, M^2, ..., M^{n^2}$ de cardinal n^2+1 est liée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension n^2 d'après le lemme de Steinitz. On en tire l'existence d'un polynôme annulateur non nul de M.
Si l'on considère l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs non nuls de M, c'est donc un ensemble non vide d'entiers naturels et comme tout ensemble d'entiers naturels non vide qui se respecte, il admet un plus petit élément.
Ceci prouve l'existence d'un polynôme annulateur non nul de M de degré minimal.
2. Si P est un polynôme annulateur alors pour tout $\lambda \in K$, λP est aussi un polynôme annulateur.
Il suffit alors de diviser P par son coefficient dominant pour obtenir un polynôme annulateur non nul **unitaire** de degré minimal.
S'il y avait deux polynômes annulateurs de degré minimal unitaires non égaux P_1 et P_2 alors P_1 et P_2 seraient de même degré, sinon l'un des deux ne serait pas de degré minimal et donc $P_1 - P_2$ serait un polynôme annulateur non nul de degré plus petit, ce qui est absurde.
3. Soit P un polynôme annulateur de M. Par division euclidienne : $P = Q \times \pi_M + R$ avec $\deg R < \deg \pi_M$ or si $P(M) = 0$ alors $R(M) = 0$ ce qui implique $R = 0$ par minimalité du degré du polynôme minimal.
Par conséquent $P = Q \times \pi_M$
4. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il apparaît que $M - I_5 = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Il vient donc que $(M - I_5)^2 = 0$, par conséquent $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de M.
Si M admettait un polynôme annulateur de degré 1 alors ce polynôme serait de la forme $X - a$ et il est annulateur de M si et seulement si $M = aI_5$, ce qui n'est pas le cas.
Conclusion : $\boxed{\pi_M = (X-1)^2}$

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

1. On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det\left({}^t(XI_n - M)\right) = \det(XI_n - {}^tM) = \chi_{{}^tM}$ donc
$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathrm{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{{}^tM}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{sp}\left({}^tM\right)$$
Ainsi $\mathrm{sp}(M) = \mathrm{sp}\left({}^tM\right)$ et donc $\boxed{M \text{ et } {}^tM \text{ ont même spectre}}$
2. <u>$\Leftarrow$:</u> On suppose que M est diagonalisable. ce qui nous fournit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$
donc ${}^tM = {}^t(P^{-1}){}^tD{}^tP = ({}^tP)^{-1}\, D{}^tP$
d'où ${}^tM$ est diagonalisable
<u>$\Rightarrow$:</u> On suppose que ${}^tM$ est diagonalisable.
Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = {}^t({}^tM)$.
On a bien montré que $\boxed{{}^tM \text{ est diagonalisable si et seulement si } M \text{ est diagonalisable}}$

I.B. Matrices compagnons

3. On montre que $\chi_{C_Q} = Q$ par récurrence sur $\deg(Q) = n \geqslant 2$

Initialisation : On suppose que $\deg(Q) = 2$ ainsi $Q = X^2 + a_1 X + a_0$ et $C_Q = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

On a $\chi_{C_Q} = X^2 - \mathrm{tr}(C_Q)X + \det(C_Q) = X^2 + a_1 X + a_0$ ce qui prouve l'initialisation

Hérédité : Soit l'entier $n \geqslant 2$. On suppose la propriété vraie pour tout polynôme unitaire de degré n.

On considère $Q(X) = X^{n+1} + a_n X^n + \cdots + a_0$ où les $a_i \in \mathbb{K}$. On a en développant par rapport à la première ligne :

$$\chi_{C_Q} = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n+1]} =$$

$$X \begin{vmatrix} -X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & -1 & X & a_{n-1} \\ \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_n \end{vmatrix}_{[n]} + (-1)^{n+2} a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Je note $R = X^n + a_n X^{-1} + \cdots + a_1$ et on a $\chi_{C_Q} = X\chi_{C_R} + a_0(-1)^{2n+2}$

Par hypothèse, on a $\chi_{C_R} = R$ donc $\chi_{C_Q} = XR + a_0 = Q$

Conclusion : On a montré par récurrence que la propriété était vraie pour tout polynôme unitaire de degré $\geqslant 2$

En particulier $\boxed{Q \text{ est le polynôme caractéristique de } C_Q}$

4. On a ${}^t(C_Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On a $\chi_{{}^tC_Q} = \chi_{C_Q} = Q$ ainsi $Q(\lambda) = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$${}^t(C_Q)X = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \dots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } {}^t(C_Q)X = \lambda X \iff \begin{cases} \forall i \in [\![2, n]\!],\ x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ Q(\lambda)x_1 = 0 \end{cases}$$

Notez bien que le "ainsi" concerne toute l'équivalence !

Comme λ est racine de Q, alors $\boxed{\dim\left(E_\lambda\left({}^tC_Q\right)\right) = 1,\ E_\lambda\left({}^tC_Q\right) = \text{vect}(X_\lambda) \text{ où } X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}}$

I.C. Endomorphismes cycliques

5. **$\Rightarrow$:** On suppose que f est cyclique.
   Ceci nous fournit $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E
   Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$
   Je pose alors $Q = X^n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda_i) X^i \mathbb{K}[X]$
   de sorte que Q est unitaire de degré n et $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = C_Q$

   $\Leftarrow$: On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n
   Ainsi $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ f(e_i) = e_{i+1}$
   donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

   $\boxed{\text{$f$ est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q où Q est un polynôme unitaire de degré n}}$

6. **$\Leftarrow$:** On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
   Ainsi $|\text{sp}(f)| = \deg(\chi_f) = \dim E$
   donc f est diagonalisable d'après le cours

   $\Leftarrow$: On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique,
   ceci nous fournit $\mathcal{B}$ une base de E et $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = C_Q$ d'après 5.
   Ainsi C_Q est diagonalisable et il en est de même pour ${}^tC_Q$ d'après 2
   Ainsi $\mathbb{K}^n = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(f)} E_\lambda\left({}^tC_Q\right)$ d'où $n = \displaystyle\sum_{\lambda \in \text{sp}\left({}^tC_Q\right)} \dim\left(E_\lambda\left({}^tC_Q\right)\right)$
   or on a $\forall \lambda \in \text{sp}\left({}^tC_Q\right),\ \dim\left(E_\lambda\left({}^tC_Q\right)\right) = 1$ d'après 4 donc $\left|\text{sp}\left({}^tC_Q\right)\right| = n$
   or d'après 1 : $\text{sp}\left({}^tC_Q\right) = \text{sp}\left(C_Q\right) = \text{sp}\left(f\right)$
   donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$
   donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

   Ainsi $\boxed{\text{$f$ est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples}}$

7. On suppose que f est cyclique.
   Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
   Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E
   donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$
   ainsi $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre
   Alors $\boxed{(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(E)}$

Je note d le degré de π_f. D'après le cours on a $d = \dim(\mathbb{K}[f])$.
Or $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geqslant n$
de plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f
d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls ainsi on a $d = \deg(\pi_f) \leqslant \deg(\chi_f) = n$
ainsi $n = d$ d'où $\boxed{\text{le polynôme minimal de } f \text{ est de degré } n}$

*On ne se sert pas de cette question pour montrer le théorème de Cayley-Hamilton dans le paragraphe **I.D** qui suit.*

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. On note $N_x = \{m \in \mathbb{N}^*\} \left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ libre.
On sait que $1 \in N_x$ car $x \neq 0_E$ et que $\forall m \geqslant n,\ m \notin N_x$ car $\dim E = n$
Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par $n-1$
donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi la famille $\left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre et la famille $\left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est liée

$$\boxed{\text{On a bien l'existence de } p \in \mathbb{N}^* \text{ et de } (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \text{ tels que la famille } (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est libre et } \alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0}$$

9. On a $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) = \mathrm{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^p(x))$ car f linéaire
or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) + \cdots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
d'où $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) \subset \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est stable par } f}$
10. Je note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est une base de $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
On remarque que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) = C_Q$ en notant $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + X^p$
d'où $\chi_{\tilde{f}} = Q$ or $\chi_{\tilde{f}} | \chi_f$ car $\tilde{f}$ induit par f
On a montré que $\boxed{X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_0 \text{ divise le polynôme } \chi_f}$
11. En reprenant les notations précédentes, on a $Q(f)(x) = 0$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = \chi_f$
Ainsi $\chi_f(f) = P(f) \circ Q(f)$ donc $\chi(f)(x) = P(f)\left[Q(f)(x)\right] = P(f)(0) = 0$ car $P(f)$ linéaire
On a ainsi montré que : $\forall x \in E,\ \chi(f)(x) = 0$
or $\chi(f) \in \mathcal{L}(E)$ d'où $\boxed{\chi_f(f) \text{ est l'endomorphisme nul}}$
12. D'après la question 0.3), χ_f est un polynôme annulateur de f donc χ_f est un multiple de π_f.
Ce qui revient à dire $\boxed{\pi_f \text{ divise } \chi_f}$

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

13. $\Rightarrow$: On suppose f cyclique alors $\deg(\pi_f) = n$ d'après 7
De plus d'après le cours, $\chi_f = X^n$ car f nilpotente
or $\pi_f | \chi_f$ selon Cayley-Hamilton et π_f est unitaire par définition
donc $\pi_f = X^n$
ainsi $f^n = 0$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f^i \neq 0$
d'où $r = n$

$\Leftarrow$ **:** On suppose que $r = n$ donc $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

Ceci nous fournit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$.

On montre que $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$

On suppose, par l'absurde, que la propriété est fausse

Je note alors j le minimum de $\{i \in [\![0, n-1]\!]\}\ \lambda_i \neq 0$

Ainsi $0 = f^{n-1-j}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x)\right) = f^{n-1-j}\left(\displaystyle\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^i(x)\right) = \lambda_j f^{n-1}(x) + \displaystyle\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i-j}(x)$

Or $\forall i \geqslant p,\ f^i(x) = 0$ donc $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0$ et $\lambda_j \neq 0$

d'où $f^{n-1}(x) = 0$ ce qui est absurde

Ainsi $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre composée de n vecteurs de E et $\dim E = n$

donc $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E

donc f est cyclique.

On a montré que $\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } r = n}$

On remarque que la matrice compagnon associée est unique car les coefficients de cette matrices sont donnés par ceux du polynôme caractéristique.

On sait que si f est cyclique et nilpotente, alors $\chi_f = X^n$

ainsi $\boxed{\text{la matrice compagnon de } f \text{ dans ce cas est } \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

II.B.

14. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, $(f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k}$ et f commutent car $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative

donc $\boxed{F_k = \mathrm{Ker}((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k}) \text{ est stable par } f}$

On a $\chi_f(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ et les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux

Alors selon le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$\mathrm{Ker}\,(\chi(f)) = \mathrm{Ker}((f - \lambda_1 \mathrm{Id}_E)^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}((f - \lambda_p \mathrm{Id}_E)^{m_p}) = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$$

de plus selon Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$ et donc $\mathrm{Ker}\,(\chi(f)) = E$

d'où $\boxed{E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p}$

15. Soit $x \in F_k$. On a $(f - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(x) = 0$

Pour tout $y \in F_k$, on a $(f - \lambda_k \mathrm{Id})(y) = \varphi_k(y) \in F_k$

ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f - \lambda_k \mathrm{Id})^p(x) = \varphi_k^p(x)$ par récurrence immédiate sur p

donc $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$, comme c'est vrai pour tout $x \in F_k$, on conclut que

$\boxed{\varphi_k \text{ est un endomorphisme nilpotent de } F_k}$

16. D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k, endomorphisme de F_k est majoré par $\dim F_k$

ainsi $\boxed{\nu_k \leqslant \dim(F_k)}$

17. Je note $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in F_k$.

On a $P(f) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] \circ (f - \lambda_k \mathrm{Id})^{\nu_k}$

donc $P(f)(x) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (\varphi_k^{\nu_k}(x)) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (0) = 0$

donc $P(f)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur chaque F_k et $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ d'après 13

donc $P(f) = 0$

Je note d le degré de P comme P est unitaire alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^d)$ est liée

donc $d \geqslant n$ car $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre

or $d = \sum_{i=0}^{p} \nu_i$ d'où $n \leqslant \sum_{i=0}^{p} \nu_i$

On remarque à l'aide de la question 14 que $\nu_k \leqslant m_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$

donc $n \leqslant \sum_{k=0}^{p} \nu_k \leqslant \sum_{i=0}^{p} m_k = n$

ainsi les inégalités sont des égalités et $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, p]\!], \text{ on a } \nu_k = m_k}$

18. Comme $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ d'après 13 et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\nu_k \leqslant \dim F_k$ d'après 15

on a donc avec la question précédente $n = \sum_{k=1}^{p} \nu_k \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k) = n$

Comme à la question précédente, on obtient : $\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!],\ \nu_k = m_k = \dim(F_k)}$

φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice $\nu_k = m_k = \dim(F_k)$

donc selon 12, φ_k est nilpotent et cyclique.

ceci nous fournit une base $\mathcal{B}_k$ de F_k tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

En notant f_k l'endomorphisme induit par f sur F_k,

on a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(f_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

En concaténant les bases $\mathcal{B}_k$ pour k allant de 1 à p

On obtient une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$

ainsi

$\boxed{\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \text{ dans laquelle } f \text{ a une matrice diagonale par blocs de formes voulues}}$

Remarque : pour la suite on peut démontrer que pour une telle base on a nécessairement :

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ (f-\lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall i \in [\![1,m_k]\!],\ u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

On peut aussi supposer que l'on travaille avec la base choisie.

19. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on a $u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1} \in F_k$
ainsi $\forall i \in \mathbb{N},\ f^i(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k stable par f
puis pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(f)(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k est stable par combinaison linéaire.
Et ainsi $P(f)(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P(f)(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1})$ est la décomposition de $P(f)(x_0)$ sur $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$
Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. On a donc $Q(f)(x_0) = 0 \iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ Q(f)(e_k) = 0$

Je note $e_k = u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}$ et on a $\mathcal{B}_k = (e_k, \varphi_k(e_k), \ldots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k
On a vu que la matrice de φ_k dans cette base est $C_{X^{m_k}}$
donc $\pi_{\varphi_k} = X^{m_k}$ car φ_k est cyclique et nilpotent et $\dim(F_k) = m_k$ selon 12

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ (f-\lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall i \in [\![1,m_k]\!],\ u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

Par ailleurs on montre facilement que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(\varphi_k) = 0 \iff P(\varphi_k)(e_k) = 0$$

car $P(\varphi_k)$ commute avec tout φ_k^i et que $(\varphi_k^i(e_k))_{0 \leqslant i < m_k}$ est une base de F_k.
Par ailleurs on a $Q(\varphi_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q$ (nilpotent et cyclique)
donc $Q(f)(e_k) = 0 \iff Q(\varphi_k + \lambda_k \mathrm{Id}_{F_k})(e_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q(X+\lambda_k)$
ainsi $Q(f)(e_k) = 0 \iff (X-\lambda_k)^{m_k} | Q(X)$
donc comme les $(X-\lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux,
on a finalement $\boxed{Q(f)(x_0) = 0 \iff \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{m_k} | Q}$

20. Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$ Je note $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ de sorte que $Q(f)(x_0) = 0$
ainsi $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{m_k} | Q$ d'après la question précédente or $\deg(Q) \leqslant n-1 < n = \deg\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{m_k}\right)$
donc Q est le polynôme nul et ainsi $\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
donc $(f^i(x_0))_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ est une famille libre de n vecteurs de E et $n = \dim E$
d'où $(f^i(x_0))_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ est une base de E ce qui justifie que $\boxed{f \text{ est cyclique}}$

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

21. L'application $g \longmapsto f \circ g - g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dont le noyau est $C(f)$
Ainsi $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

De plus, soit g et $h \in C(f)$. On a $(g \circ h) \circ f = g \circ f \circ h = f \circ (g \circ h)$
ainsi $C(f)$ est stable par $\circ$ et il est clair que $\mathrm{Id} \in C(f)$
Ainsi $\boxed{C(f) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E)}$

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

22. On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

    d'où $\boxed{\text{l'existence de } \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \text{ de } \mathbb{K} \text{ tels que } g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)}$

23. Il suffit d'établir que les applications linéaires g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.

    On montre par récurrence immédiate que $\forall i \in \mathbb{N},\ g \in C\left(f^i\right)$

    Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. En utilisant 21 et le fait que l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative

    $$g\left(f^i(x_0)\right) = f^i\left(g(x_0)\right) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k\left(f^i(x_0)\right)$$

    donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ et $\boxed{g \in \mathbb{K}[f]}$

24. On vient d'établir le sens direct (avec un polynôme de degré $\leqslant n-1$)

    La réciproque vient du fait que $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative et que $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathbb{K}[f]$.

    On conclut que

    $$\boxed{g \in C(f) \text{ si et seulement s'il existe un polynôme } R \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ tel que } g = R(f)}$$

III.B. Décomposition de Frobenius

25. On suppose que $G = F_1 \cup \cdots \cup F_r$ est un sous espace de E.

    Par l'absurde, je suppose qu'aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.

    Ainsi $r \geqslant 2$ et $G \neq \{0\}$.

    Quitte à réduire le nombre, on peut supposer qu'aucun F_i n'est inclus dans la réunion des autres.

    Cela nous fournit $x_1 \in F_1$ qui n'est dans aucun des F_i pour $i \geqslant 2$.

    Sinon, $F_1 \neq G$ et on peut aussi trouver $y \in G \setminus F_1$.

    Pour tout scalaire λ, on a $y + \lambda x_1 \notin F_1$ (car sinon $y \in F_1$) et ainsi $y + \lambda x_1 \in F_2 \cup \cdots \cup F_r$.

    La droite affine $y + \mathbb{K}x_1$ est donc incluse dans $F_2 \cup \cdots \cup F_r$ et contient une infinité d'éléments car $\mathbb{K}$ est infini et $t \in \mathbb{K} \mapsto y + tx_1$ est injective car $x_1 \neq 0$

    Ceci nous fournit $j \in [\![2, r]\!]$ et $\lambda \neq \lambda'$ dans $\mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x_1 \in F_j$ et $y + \lambda' x_1 \in F_j$

    donc $x_1 \in F_j$ (par combinaison linéaire) ce qui est absurde

    Ainsi $\boxed{\text{l'un des sous-espaces } F_i \text{ contient tous les autres}}$

    Remarque : Pour $r = 2$, il existe une preuve classique purement algébrique.

26. Soit $x \in E$

    (a) Comme dans la partie 0, l'ensemble des polynômes P non nuls tels que $P(f)(x) = 0$ est non vide (il contient π_f) donc il admet un polynôme de degré minimal, et par division euclidienne, tous les autres polynômes sont des multiples de celui-ci.

    (b) Avec ce qui précède, on a donc : $\forall x \in E,\ \pi_{f,x} | \pi_f$

(c) Si on écrit $\pi_f = \prod_{k=1}^{N} P_i^{\alpha_i}$ décomposition en facteurs irréductibles, où $N \in \mathbb{N}^*$, les P_i sont irréductibles unitaires et distincts deux à deux et enfin les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Alors le nombre de diviseurs unitaires de π_f est $\prod_{k=1}^{N}(\alpha_i + 1)$

(d) Ainsi l'ensemble $\{\pi_{f,x}\} x \in E$ est fini de cardinal noté r où $r \in [\![1, \prod_{k=1}^{N}(\alpha_i + 1)]\!]$

On peut donc choisir $u_1, \dots u_r \in E$, tel que $\{\pi_{f,x}\} x \in E = \{\pi_{f,u_i}\} i \in [\![1, r]\!]$

Ainsi $E = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\pi_{f,u_i}(f))$ car $\forall x \in E,\ x \in \mathrm{Ker}(\pi_{f,x}(f))$

(e) La question précédente (question 25) nous fournit $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}(\pi_{f,u_{i_0}}(f)) = E$

On note $x_1 = u_{i_0}$ et on a $\mathrm{Ker}(\pi_{f,x_1}(f)) = E$

On remarque que $\pi_{f,x_1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\pi_f | \pi_{f,x_1}$

or $\pi_{f,x_1} | \pi_f$ et ce sont des polynômes unitaires

donc $\pi_{f,x_1} = \pi_f$ Finalement

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)(x_1) = 0 \Longleftrightarrow \pi_f | P$$

en faisant comme en 19, on montre que $\boxed{(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) \text{ est libre}}$

27. En faisant comme en 9, on montre que $\boxed{E_1 \text{ est stable par } f}$
De plus, on a $E_1 = \{P(f)(x_1)/\ P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \subset \{P(f)(x_1)/\ P \in \mathbb{K}[X]\}$
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comme $\pi_f \neq 0$,
le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} P = Q\pi_f + R \\ \deg(R) < d = \deg(\pi_f) \end{cases}$
On a alors $P(f)(x_1) = [Q(f) \circ \pi_f(f)](x_1) + R(f)(x_1) = R(f)(x_1) \in \{T(f)(x_1)/\ T \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$
On conclut que $\boxed{E_1 = \{P(f)(x_1)/\ P \in \mathbb{K}[X]\}}$

28. D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ est une base de E_1.
De plus on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = C_{\pi_f}$ matrice compagnon du π_f polynôme unitaire de degré $d = \dim(E_1)$
alors d'après 5, $\boxed{\psi_1 \text{ est cyclique}}$

29. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $F_i = \mathrm{Ker}\left(\Phi \circ f^i\right)$ ainsi $F = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ est bien un sous-espace de E
De plus, on a pour $i \geqslant 1$, $f(F_i) \subset F_{i-1}$ donc

$$f(F) \subset f\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} F_i\right) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} f\left(F_i\right) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} F_{i-1} = F$$

d'où $\boxed{F \text{ est stable par } f}$
Soit $u \in E_1 \cap F$.

Comme $u \in E_1$, cela nous fournit $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k$

or $\Phi(x) = \lambda_d$ et $\Phi(f^0(x)) = 0$ car $u \in F$, donc $\lambda_d = 0$ d'où $u = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_k$

puis $f(u) = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_{k+1}$ et donc $\lambda_{d-1} = 0$ et $f(u) = \sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k e_{k+1}$

En réitérant le procédé, on trouve $\lambda_{d-2} = \ldots = \lambda_1 = 0$
donc $u = 0$
L'autre inclusion étant évidente, on a $E_1 \cap F = \{0\}$ d'où $\boxed{E_1 \text{ et } F \text{ sont en somme directe}}$

30. Je note Ψ_1 l'application linéaire induite par Ψ entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Psi_1)$.
On a $x \in E_1$ et $\Phi(x) = \Phi(f(x)) = \cdots = \Phi(f^{d-1}(x)) = 0$.
En faisant comme à la question précédente, on obtient $x = 0$
L'autre inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Ker}(\Psi_1) = \{0\}$
Ainsi Ψ_1 est une application linéaire injective entre E_1 et $\mathbb{K}^d$ or $\dim(E_1) = d = \dim(\mathbb{K}^d)$
En utilisant le théorème du rang, on obtient que Ψ_1 est surjective puis bijective
Ainsi $\boxed{\Psi \text{ induit un isomorphisme entre } E_1 \text{ et } \mathbb{K}^d}$

31. De la question précédente, on montre que Ψ est surjective de E vers $\mathbb{K}^d$ et que $\mathrm{Ker}(\Psi) \bigcap E_1 = \{0\}$.
Ainsi $\dim(E_1) = d = \mathrm{rg}(\Psi)$ et $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\Psi)) + \mathrm{rg}(\Psi) = \dim(\mathrm{Ker}(\Psi)) + \dim(E_1)$
donc $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}(\Psi)$
On a $\mathrm{Ker}\,\Psi = \bigcap_{i=0}^{d-1} F_i$ (les F_i sont introduits en 28) on a donc $F \subset \mathrm{Ker}\,\Psi$
Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. Montrons que $x \in F$
Soit $i \in \mathbb{N}$. Il suffit d'établir que $\Phi(f^i(x)) = 0$
Le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(R) < d$ et $X^i = Q\pi_f + R$.
On peut écrire $R = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$. On a comme en 26 et car Φ est linéaire

$$\Phi(f^i(x)) = \Phi(0) + \Phi(R(f)(x)) = 0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi\left(f^k(x)\right) = 0$$

ainsi $F \supset \mathrm{Ker}\,\Psi$ d'où $F = \mathrm{Ker}\,\Psi$
on conclut que $\boxed{E = E_1 \oplus F}$

32. **Préambule :** Avant de commencer la construction par récurrence, on remarque que dans ce qui précède le polynôme minimal de f est celui de ψ_1 et donc que $\forall x \in F, \pi_{\psi_1}(f)(x) = 0$

Initialisation : On prend E_1, F et ψ_1 comme ci dessus.
On a E_1 stable par F et ψ_1 cyclique.
On pose $P_1 = \pi_f = \pi_{\psi_1}$, $G_1 = F$ de sorte que $E_1 \oplus G_1 = E$
On a $\forall x \in G_1,\ P_1(f)(x) = 0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose avoir l'existence de k sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \ldots, E_k$ et G_k tous stables par f, tels que

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k \oplus G_k$;
— pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, l'endomorphisme ψ_k induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant k-1$
— $\forall x \in G_k,\ P_k(f)(x) = 0$

Si $\dim G_k = 0$, on s'arrête et on pose $r = k$
Sinon, on applique 24 à 30 à l'endomorphisme induit par f sur G_k
On obtient alors E_{k+1}, G_{k+1} sous espaces stables par f et le polynôme P_{k+1} tels que

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{k+1} \oplus G_{k+1}$;
— l'endomorphisme ψ_{k+1} induit par f sur le sous-espace vectoriel E_{k+1} est cyclique ;
— si on note P_{k+1} le polynôme minimal de ψ_{k+1}, alors P_{k+1} divise P_k
— $\forall x \in G_{k+1},\ P_{k+1}(f)(x) = 0$

On a ainsi la construction voulue au rang k.

Conclusion : Cette construction algorithmique s'arrête car à chaque étape $\dim(E_k) \leqslant 1$ et donc $r \leqslant \dim(E)$. car $(\dim G_k)_k$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante.

On obtient ainsi le résultat voulu.

On en déduit qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \ldots, E_r$, tous stables par f, tels que :

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
— pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

33. Je reprends les notations de la questions précédente pour la décomposition de Frobenius de f.
Je note Λ l'application telle que pour $(g_1, \ldots, g_r)\mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r)$, on a $\Lambda(g_1, \ldots, g_r)$ défini sur E par $\Lambda(g_1, \ldots, g_r)(x) = g_1(x_1) + \cdots g_r(x_r)$ où $x = \sum_{k=1}^{r} x_k$ et les $x_k \in E_k$
Ainsi définie, Λ est linéaire de $\mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$
De plus on montre facilement que Λ est injective et que $\Lambda\left(C(\psi_1) \times \cdots \times C(\psi_r)\right) \subset C(f)$
Ainsi $\dim\left(C(f)\right) \geqslant \dim\left(C(\psi_1) \times \cdots \times C(\psi_r)\right) = \dim\left(C(\psi_1)\right) + \cdots + \dim\left(C(\psi_r)\right)$
or pour $i \in [\![1, r]\!]$, en notant $n_i = \dim E_i$ on a $C(\psi_i) = \mathrm{Vect}(\psi_i^0, \psi_i^1, \ldots, \psi_i^{n_i-1})$ d'après 23 du **III.A**
Comme ψ_i est cyclique alors $(\psi_i^0, \psi_i^1, \ldots, \psi_i^{n_i-1})$ est libre d'après 7
donc $\dim\left(C(\psi_i)\right) = n_i = \dim\left(E_i\right)$ d'où

$$\dim\left(C(\psi_1)\right) + \cdots + \dim\left(C(\psi_r)\right) = \dim\left(E_1\right) + \cdots + \dim\left(E_r\right) = \dim\left(E_1 \oplus \cdots \oplus E_r\right) = \dim(E) = n$$

Ainsi $\boxed{\text{la dimension de } C(f) \text{ est supérieure ou égale à } n}$

34. On note $d = \deg\left(\pi_f\right)$. D'après le cours, on a $\dim\left(\mathbb{K}[f]\right) = d$
or $\mathbb{K}[f] = C(f)$ et $\dim C(f) \geqslant n$ donc $d \geqslant n$.
Or on a $\pi_f | \chi_f$ comme conséquence de Cayley-Hamilton ainsi $d \leqslant n$
donc $d = n$
Or en reprenant les notations précédentes, on a $\dim(E_1) = d = n$
Donc $E_1 = E$ et $\psi_1 = f$ or ψ_1 est cyclique
ainsi $\boxed{f \text{ est cyclique}}$

Exercice

1. Si B est solution, alors $AB = B^3 B = B^4 = BB^3 = BA$.
2. Si A admet trois valeur propres réelles distinctes, alors elle est diagonalisable et les sous-espaces propres de A sont trois droites vectorielles. Comme A et B commutent, ces droites sont stables par B et les vecteurs propres de A sont donc aussi des vecteurs de propres de B.
Par conséquent A et B sont diagonalisables dans la même base, elles sont donc codiagonalisables.

Si l'on note $D_A = \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$ la matrice diagonale semblable à A et $D_B = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ la matrice diagonale semblable à B, la relation $B^3 = A$ se ramène à $D_B^3 = D_A$.
Ou encore $\alpha^3 = \lambda, \beta^3 = \mu, \gamma^3 = \nu$. Comme la fonction $x \longmapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors il n'y a qu'une seule solution à l'équation $B^3 = A$.

3. (a) $M^3 = \begin{pmatrix} r\cos(3\theta) & -r\sin(3\theta) & 0 \\ r\sin(3\theta) & r\cos(3\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Si $A = I_3$, montrons qu'il y a une infinité de solutions. Remarquons que la matrice précédente pour $r = 1$ et $\theta = 2\pi/3$ vérifie $M^3 = I_3$. Par conséquent, toute matrice B semblable à M vérifie $B = PMP^{-1}$, ce qui implique $B^3 = PM^3P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$.
Il reste à montrer que la classe de similitude de $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est infinie.
Posons $P_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible dont l'inverse (cf. ds 2) est la matrice P_{-t}.
Le calcul $P_{-t}MP_t$ donne $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -t\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & t(1/2 - \sqrt{3}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En faisant varier t, on obtient donc une infinité de matrices semblables à M.

(c) Si A est diagonalisable et a un sous-espace propre de dimension $\geqslant 2$ alors soit A a deux valeurs propres distinctes dont l'une est d'ordre 2, soit A a une seule valeur propre d'ordre 3.
Dans ce dernier cas, $A = \lambda I_3$ et il suffit de multiplier l'infinité de solutions de la question précédente par $\sqrt[3]{\lambda}$ pour obtenir une infinité de solutions de l'équation $B^3 = A$.
Dans l'autre cas, A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ et avec la multiplication par blocs, il suffit de trouver une infinité de solutions dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à l'équation $M^3 = \lambda I_2$.
Pour cela, prenons une matrice réelle dont les valeurs propres sont j et j^2.
C'est la matrice utilisée en fait dans la question précédente : $M = \sqrt[3]{\lambda} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
Calculons alors $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \sqrt[3]{\lambda} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt[3]{\lambda} \begin{pmatrix} 1/2 - t\sqrt{3}/2 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ et il suffit de faire varier t pour obtenir une infinité de solutions à l'équation $B^3 = A$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Or nous savons que la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ qui sont distinctes d'après l'hypothèse faite sur θ.
Les vecteurs propres associés sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.
La matrice de passage P de la base canonique à la base de vecteurs propres est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ et l'on calcule aisément $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.
On obtient donc $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P^{-1}$.
Dans $M_3(\mathbb{C})$ la matrice A est diagonalisable à spectre simple : on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} re^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & re^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le raisonnement de la question (b) reste valable. B est donc diagonalisable dans la même base de vecteurs propres.

On peut donc écrire $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Et l'équation $B^3 = A$ devient $\alpha^3 = re^{i\theta}, \beta^3 = re^{-i\theta}, \gamma^3 = \lambda$.

Ces trois valeurs sont distinctes et elles ont chacune dans $\mathbb{C}$ trois racines cubiques distinctes.

Si l'on avait dû résoudre l'équation $B^3 = A$ dans $M_3(\mathbb{C})$, on aurait ainsi trouvé 9 solutions distinctes.

Mais nous devons résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$.

On peut déjà dire que le sous-espace propre dirigé par E_3 le 3ème vecteur de la base canonique est de dimension 1 et est stabilisé par B donc c'est aussi un vecteur propre de B, par conséquent, $\gamma = \sqrt[3]{\lambda}$.

De plus les racines cubiques de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont complexes non réelles et comme B est une matrice à coefficients réels, ses valeurs propres complexes non réelles vont par paires de complexes conjugués.

Le triplet (α, β, γ) peut donc prendre les valeurs possibles :

$(\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}, \sqrt[3]{r}e^{-i\theta/3}, \sqrt[3]{\lambda})$, $(\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3+2\pi/3}, \sqrt[3]{r}e^{-i\theta/3-2\pi/3}, \sqrt[3]{\lambda})$, $(\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3+4\pi/3}, \sqrt[3]{r}e^{-i\theta/3-4\pi/3}, \sqrt[3]{\lambda})$.

Si l'on multiplie par P et P^{-1}, on va trouver **trois** matrices réelles qui seront solutions.

5. Si A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ avec trois valeurs propres distinctes, on est dans le cas de la question 2 et il y a une solution unique.

   Si A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ avec une valeur propre d'ordre $\geqslant 2$, alors d'après la question 3, il y a une infinité de solutions.

   Si A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$ alors A est semblable à une matrice du type de la question 4 et il y a donc trois solutions.

   Si A n'est pas diagonalisable dans $M_3(C)$, alors A est semblable à une matrice de la forme :

   $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq \mu$, ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

   (a) 1er cas : $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$. Si l'on écrit $B = PCP^{-1}$ alors l'équation $B^3 = A$ équivaut à $C^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ $(*)$.

   En particulier, comme à la question 1), ces deux matrices commutent ce qui implique que C soit de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Puis $(*)$ implique $\alpha^3 = \lambda, \gamma^3 = \mu, 2\alpha^2\beta = 1$. Cette dernière équation impose de considérer deux sous-cas.

   Si $\lambda \neq 0$ alors les trois équations ci dessus déterminent (dans $\mathbb{R}$) de manière unique α, β et γ : il y a donc une unique solution.

   Si $\lambda = 0$, il n'y a pas de solution (on pouvait retrouver ce résultat en considérant l'indice de nilpotence de la matrice extraite) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.'

   (b) 2ème cas : $A = PTP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$. Avec les mêmes notations que précédemment, C commute avec $T = \lambda I_3 + E_{1,2}$, ce qui revient à dire que C commute avec $E_{1,2}$. Comme dans le premier cas, on trouve une unique solution si $\lambda \neq 0$ et aucune solution si $\lambda = 0$.

(c) 3ème cas : $A = PTP^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}$. Avec les mêmes notations C commute avec $T = \lambda I_3 + E_{1,2} + E_{2,3} = \lambda I_3 + N$, ce qui équivaut à dire que C commute avec N.
Or N est nilpotente d'indice 3 donc c'est un endomorphisme cyclique et d'après le problème étudié dans ce DS, le commutant de N est égale à $\mathbb{R}[N]$ et donc $C = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}$.
A nouveau, le système obtenu admet une unique solution si $\lambda \neq 0$ et aucune si $\lambda = 0$.