PC $\overset{\star}{2}$ **Devoir Surveillé n° 3** 16 novembre 2024

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les résultats devront être encadrés.
Tout résultat (complément de cours, exercices incontournables ou autres) ne figurant pas textuellement au programme de PC doit être redémontré pour être utilisé.

Problème : Soit $n \geqslant 2$. Dans tout le problème, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_A(M) = AM - MA$.
On dira que A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = PDP^{-1}$.
De même, A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est $\mathbb{C}$-diagonalisable s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PDP^{-1}$.

Partie I : Généralités

1. Montrer que $\varphi_A = 0$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.
2. (a) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $(\varphi_A \circ ... \circ \varphi_A)(M) = \varphi_A^p(M)$.
   (b) En déduire que si A est nilpotente alors φ_A est nilpotente également.
3. Pour A quelconque, calculer $\operatorname{tr}(\varphi_A)$.

Partie II : Etude du cas $n = 2$. Dans cette partie **uniquement**, on suppose $n = 2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On suppose que $\varphi_A \neq 0$, montrer que φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.
3. On suppose que $A \neq \lambda I_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, montrer que φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable $\Longleftrightarrow$ A est $\mathbb{R}$-diagonalisable.

Partie III : Etude du cas général

On note $c = (c_1, ..., c_n)$ la base canonique.

1. On suppose que A est $\mathbb{R}$-diagonalisable. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   On note $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de u et pour $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée à e_i.
   On note P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
   Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on pose $B_{ij} = PE_{ij}P^{-1}$.
   (a) Montrer que B_{ij} est un vecteur propre de φ_A.
   (b) En déduire que φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable. Quel est le spectre de φ_A ?
2. On suppose dans cette question que φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable. On note $(P_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une base de vecteurs propres de φ_A et λ_{ij} la valeur propre associée à P_{ij}.
   (a) Dans cette question, on considère A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_A comme l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
      i. Montrer que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.
      ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que si z est valeur propre de A alors z est aussi valeur propre de A^T .
      iii. On suppose dans cette question que z et $\bar{z}$ sont valeurs propres de A.
      Soit X un vecteur propre de A associé à z et Y un vecteur propre de A^T associé à $\bar{z}$.
      Montrer que $z - \bar{z}$ est valeur propre de φ_A.
      iv. En déduire que A a au moins une valeur propre réelle.
      v. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de A et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Calculer $AP_{ij}X$.
      vi. En déduire que A est $\mathbb{R}$-diagonalisable.
3. On souhaite montrer que le spectre de φ_A obtenu à la question III.1.(b) en supposant que A est diagonalisable est en fait valable dans le cas général.
   On considère à nouveau A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_A comme l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $E = \mathbb{C}^n$, on note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à A et $\varphi_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ défini par $\forall\, v \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi_u(v) = u \circ v - v \circ u$.
   (a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \neq 0$ et $G \neq E$. Montrer qu'il existe v non nul dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} v \subset F$ et $G \subset \operatorname{Ker} v$.
   En déduire que si λ et λ' sont deux valeurs propres de u (pas forcément distinctes), il existe v dans $\mathcal{L}(E)$ non nul tel que $u \circ v = \lambda v$ et $v \circ u = \lambda' v$.
   Que vaut alors $\varphi_u(v)$?

(b) Soit μ une valeur propre de φ_u et $v \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre associé. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E dans laquelle la matrice $T = (t_{ij})$ de u est triangulaire supérieure (on rappellera pourquoi une telle base existe).
Démontrer qu'on peut choisir un entier $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $v(e_j)$ soit vecteur propre de u. Préciser la valeur propre associée.

(c) Déduire de (a) et de (b) le spectre de φ_u et celui de φ_A.

(d) Application : montrer que φ_A est nilpotente si et seulement si A peut s'écrire comme la somme d'une matrice nilpotente et d'une matrice d'homothétie (i.e de la forme λI_n).

Partie IV : Etude du sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 0

1. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A de degré minimal. On note m ce degré.
2. On pose $\mathbb{R}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $(I_n, A, ..., A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.
3. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\operatorname{Ker} \varphi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \operatorname{Ker} \varphi_A$.
4. On suppose que u, l'endomorphisme canoniquement associé à A, est nilpotent d'indice n.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.
   (a) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Soit $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$ et soit v l'endomorphisme canoniquement associé à B.
   Montrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.
   (c) En déduire $\operatorname{Ker} \varphi_A$
5. On suppose à présent que u est nilpotent d'indice 2. On note r le rang de u et on pose $s = n - 2r$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :
   $$Mat(u, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow s \\ \updownarrow r \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \overset{\leftrightarrow}{r} & \overset{\leftrightarrow}{s} & \overset{\leftrightarrow}{r} \end{array} \end{array}$$
   où I_r désigne la matrice identité d'ordre r.
   (b) Soit $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$ et soit v l'endomorphisme canoniquement associé à B.
   En écrivant la matrice de v dans la base $\mathcal{B}'$ par blocs, déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi_A$ en fonction de n et de r. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} \varphi_A \geqslant \dfrac{n^2}{2}$.
6. On suppose que u est $\mathbb{R}$-diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de u et E_{λ_k} le sous-espace propre associé. On note m_k la dimension de E_{λ_k}.
   (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v canoniquement associé à B. Montrer que $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$ si et seulement si, E_{λ_k} est stable par v , pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$.
   (b) En déduire que $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adpatée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u a une forme que l'on précisera.
   (c) Préciser la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi_A$.
   (d) Pour $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).
7. Un exemple lorsque A n'est pas diagonalisable :
   (a) Montrer, en détaillant, que $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera P. On ne demande pas d'expliciter P^{-1}.
   (b) Déterminer le noyau de $\operatorname{Ker} \varphi_T$. Déterminer sa dimension.
   (c) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi_A$.
   (d) i. Existe-t-il un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2 ?
   ii. Démontrer alors que $\operatorname{Ker} \varphi_A = \operatorname{Vect} \{I_3, A, A^2\}$.
   iii. En déduire que $\operatorname{Ker} \varphi_A$ est l'ensemble des polynômes en A. Cela reste-t-il vrai $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Partie V : Etude du sous-espace propre de φ_A associé à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre réelle non nulle de φ_A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Soit π_B le polynôme annulateur de B de degré minimal. Soit d le degré de π_B.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi_A(B^k)$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.
3. Montrer que $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul.
4. En déduire que $B^d = 0$.