PC $\overset{\star}{2}$ **Devoir Surveillé n° 2** 4 octobre 2025

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les résultats devront être encadrés.

Problème 1 : Dans ce problème ,

— E est un $\mathbb{K}$.e.v. de dimension $n \geqslant 2$.

— On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E.

— On note $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E non inversibles tels que $\operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

— On note J_n la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

L'objectif du problème est de déterminer les endomorphismes de E qui peuvent s'écrire comme un produit d'endomorphismes nilpotents.

I Généralités

1) Soient $u_1, \dots, u_p$ dans $\mathcal{N}(E)$. Justifier que $u_p \circ \dots \circ u_1$ n'est pas inversible.

2) Soit F un sev de E de dimension $p \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{N}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = F$.

3) Soient deux s.e.v. E_1 et E_2 de E. Montrer que si E_1 et E_2 ont un supplémentaire commun alors ils sont de même dimension.

On admettra la réciproque, vue dans l'exercice 210 de la feuille 4, corrigé en TD : Si deux s.e.v. de E ont la même dimension, alors ils ont un supplémentaire commun.

II Lemme de factorisation

1) Soient a et c dans $\mathcal{L}(E)$, soit S un supplémentaire de $\operatorname{Im} c$.

Montrer que : $\operatorname{Ker} c \subset \operatorname{Ker} a \iff$ il existe un unique $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a = b \circ c$ et $b_{|S} = 0$.

2) Dans cette question, $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme non inversible.

a) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{N}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

b) Prouver qu'il existe un supplémentaire commun à $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$. Dans la suite, on choisit T un tel supplémentaire.

c) Montrer qu'il existe un unique $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = w \circ v$ et $w_{|T} = 0$.

d) Montrer que $w \in \mathcal{F}(E)$.

III Génération du groupe linéaire

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient r et s dans $[\![1, p]\!]$ avec $r \neq s$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On pose $T_{r,s}^{(p)}(\lambda)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux valent 1, le coefficient (r, s) vaut λ et les autres coefficients sont nuls. On note G_p l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui s'écrivent comme produits de matrices $T_{r,s}^{(p)}(\lambda)$.

On note également, pour $\mu \in \mathbb{K}^*$, $D_\mu^{(p)}$ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1) **a)** Calculer $T_{r,s}^{(p)}(\lambda) \times T_{r,s}^{(p)}(\lambda')$. Quel est l'inverse de $T_{r,s}^{(p)}(\lambda)$?

b) Vérifier qu'un élément de G_p est inversible et que son inverse est dans G_p.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose ici $p \geqslant 2$.

a) Expliquer en termes d'opérations sur les lignes et les colonnes comment s'obtiennent à partir de M les matrices $T_{r,s}^{(p)}(\lambda) \times M$ et $M \times T_{r,s}^{(p)}(\lambda)$.

b) Montrer que si $M \in GL_p(\mathbb{K})$, on peut trouver A et B dans G_p telles que $M' = AMB$ vérifie $m'_{11} = 1$.

c) Montrer que si $M \in GL_p(\mathbb{K})$, on peut trouver C et D dans G_p telles que CMD soit de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{M} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ où $\bar{M} \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{K})$

3) **a)** Si $p \geqslant 2$ et si $P \in G_{p-1}$, montrer que la matrice $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ est dans G_p

b) Montrer que toute matrice M de $GL_p(\mathbb{K})$ est de la forme $R \times D_\mu^{(p)} \times S$ où R et S sont dans G_p et μ dans $\mathbb{K}^*$.

IV Soit $d \in [\![1, n-1]\!]$.

1) soit $g \in \mathcal{L}(E)$, montrer l'équivalence entre :

a) $g \in \mathcal{F}(E)$ et $\operatorname{rang} g = d$.

b) il existe une base $\mathcal{B}$ de E et P dans $GL_d(\mathbb{K})$ telles que $mat_{\mathcal{B}}(g) = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

2) Montrer que toute matrice de $GL_d(\mathbb{K})$ s'écrit comme produit de matrices de $\mathcal{T}_d^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_d^-(\mathbb{K})$.

3) Montrer que si $Q \in GL_d(\mathbb{K})$ alors $\left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un produit de matrices de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ ayant toutes leur dernière ligne et leur dernière colonne nulles.

4) Soit $M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ayant sa dernière colonne nulle. Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente telle que $M = N \times J_n$.

5) Quels sont les $u \in \mathcal{L}(E)$ qui peuvent s'écrire sous la forme $u = u_p \circ \dots \circ u_1$ avec $u_1, \dots, u_p$ dans $\mathcal{N}(E)$?

Problème 2 :

On cherche à montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

Première méthode :

1) Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un hyperplan et qu'il contient bien une matrice inversible.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle de taille n.

a) Calculer $\mathrm{tr}({}^tA \times A)$.

b) On pose $f_A = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}({}^tAM) \end{array} \right.$.

Montrer que $\varphi = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & f_A \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

3) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

a) Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}({}^tAM) = 0\}$.

b) **i)** On suppose $\mathrm{tr}(A) = 0$. Conclure.

ii) On suppose A diagonale. En considérant la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, conclure.

iii) On suppose A non diagonale. Soit $a_{k,l}$ un coefficient non diagonal de A non nul. Chercher une matrice de la forme $I_n + \lambda E_{kl}$ appartenant à H, puis conclure.

4) Peut-on étendre ce résultat à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Deuxième méthode :

On suppose que H est un hyperplan qui ne contient pas de matrice inversible.

1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus Vect(I_n)$.

2) Soit i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.

a) Montrer qu'il existe $h_{ij} \in H$ et $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ tels que $E_{ij} = h_{ij} + \lambda_{ij} I_n$.

b) Montrer que si $\lambda_{ij} \neq 0$ alors $E_{ij} - \lambda_{ij} I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire que $E_{ij} \in H$.

3) Conclure.

Exercice

On pose $P(X) = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.

a) Calculer le degré de P et son coefficients dominant.

b) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

d) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

e) Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x < x < \tan x$ et que $\mathrm{cotan}^2 x \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \mathrm{cotan}^2 x$.

f) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

◊ ◊ ◊