Correction du DS n° 1

Problème : produits infinis

partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

1. Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est clair.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'inégalité vérifiée au rang n pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$.
   Soit $x_1, \cdots, x_{n+1}$, n+1 réels.

$$\begin{aligned}
\left|\left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)\right)-1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1+x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| \\
&\leqslant \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right|+\left|x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| \quad \text{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1+|x_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) \quad \text{hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant (1+|x_{n+1}|)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1 \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+|x_k|)\right)-1
\end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$ par une simple étude de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ ou par convexité de exp (courbe située au dessus de la tangente en 0) ou par croissance de l'intégrale :
   - pour $x \geqslant 0$, $e^x - 1 = \displaystyle\int_0^x e^t dt \geqslant \int_0^x 1 = x$
   - pour $x \leqslant 0$, $e^x - 1 = -\displaystyle\int_x^0 e^t dt \geqslant -\int_x^0 1dt = x$.

   Par conséquent, comme $1 + x_k \geqslant 0$ pour $x_k \in [-1, +\infty[$, on peut multiplier les inégalités $(1 + x_k) \leqslant e^{x_k}$ de $k = 1$ à n :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

3. (a) Soit $t \in \mathbb{C}$, en utilisant l'égalité : $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}$ ainsi que l'inégalité triangulaire puis $k! \geqslant (k-2)!$:

$$|(1+t)-e^t| = \left|-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k!} \leqslant |t|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 e^{|t|}$$

   (b) On a par l'inégalité triangulaire :

$$|a^n - b^n| = \left|(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}\right| \leqslant |a-b|\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{|a^k|}_{\leqslant M^k}\underbrace{|b|^{n-1-k}}_{M^{n-1-k}} \leqslant nM^{n-1}|a-b|$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M = \max\left\{\left|1+\frac{z}{n}\right|, \left|e^{\frac{z}{n}}\right|\right\}$. D'après les questions précédentes :

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n\right| \leqslant nM^{n-1}\left|1+\frac{z}{n}-e^{\frac{z}{n}}\right| \leqslant nM^{n-1}\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\frac{|z|}{n}}$$

De plus, on a $\left|1+\frac{z}{n}\right| \leqslant 1+\frac{|z|}{n} \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$ et $|e^{\frac{z}{n}}| \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$ (obtenu par inégalité triangulaire et développement en série de l'exponentielle) donc $M \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$ et par conséquent,
$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leqslant nM^{n-1}\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\frac{|z|}{n}} \leqslant \frac{|z|^2}{n}e^{\frac{(n-1)|z|}{n}}e^{\frac{|z|}{n}} = \frac{|z|^2}{n}e^{|z|}$

(d) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant |u_n - e^z| \leqslant \frac{|z|^2}{n}e^{|z|}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^2}{n}e^{|z|} = 0$ donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - e^z| = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^z$

4. Pour $N \geqslant 2$, $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \frac{\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\prod_{n=2}^{N} n}\frac{\prod_{n=2}^{N}(n+1)}{\prod_{n=2}^{N} n} = \frac{1}{N}\frac{N+1}{2}$

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2}$ d'où $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$
Et pour $N \geqslant 2$, en séparant le produit pour $n = 2k$ (alors $n+(-1)^{n+1} = 2k-1$) et $n = 2k-1$ (alors $n+(-1)^{n+1} = 2k$) :

$$\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{(2N)!}\prod_{n=2}^{2N}\left(n+(-1)^{n+1}\right) = \frac{1}{(2N)!}\prod_{k=1}^{N}(2k-1)\prod_{k=2}^{N}(2k) = \frac{1}{2}$$

De plus

$$\prod_{n=2}^{2N+1}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\times\left(1-\frac{1}{2N+1}\right) \to \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}$

5. Question vue en classe, on obtient $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ par une IPP.
L'expression de W_{2n+1} s'obtient alors par récurrence (pour l'initialisation, $W_1 = 1$)

6. On utilise la formule que nous livre Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ et $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$
D'où

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{(2n)}\frac{2\pi n(n/e)^{2n}}{2\sqrt{\pi n}(2n/e)^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Puis, pour $n \geqslant 1$,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4k^2-1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} = 4^n(n!)^2\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)(2k)}{(2n)!(2n+1)!} = (2n+1)W_{2n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Donc $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}$

partie II

1. (a) Par définition, si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ non nulle.
   Or $u_n = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}$. Par passage à la limite, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

   (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = n+1 \to +\infty$. La réciproque de a) est donc fausse.

2. Par une récurrence immédiate, on trouve $\displaystyle(1-z^2)\prod_{k=1}^{n}(1+z^{2^k}) = 1-z^{2^{n+1}}$.

   Comme $|z|<1$, on trouve : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z^2}$.

3. (a) On applique de manière itérée la formule $\sin(\theta) = 2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})$, puis $\sin(\frac{\theta}{2}) = 2\sin(\frac{\theta}{4})\cos(\frac{\theta}{4})$, etc ...

   On obtient : $\displaystyle\sin(\frac{\theta}{2^n})\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2^k}) = \frac{1}{2^n}\sin(\theta)$.

   (b) Si $\theta = 0$, alors le produit est constant et vaut 1.
   Si $\theta \neq 0$, grâce à l'équivalent $\sin(\frac{\theta}{2^n}) \sim \frac{\theta}{2^n}$ et comme le terme $\sin\frac{\theta}{2^n}$ est non nul pour n assez grand, il vient : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{\theta} \neq 0$.

partie III

1. (a) Par continuité des fonctions exponentielle et logarithme, la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite non nulle si et seulement si la suite $\ln p_n$ converge. Comme $\displaystyle\ln p_n = \sum_{k=1}^{n}\ln u_k$, la convergence de la suite $\ln p_n$ est par définition la convergence de la série $\sum \ln u_n$. Dans le cas de convergence, on a donc $P = e^S$.

   (b) On a $\ln\sqrt[n]{n} = \dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$. Donc la série $\sum \dfrac{\ln}{n}$ diverge par théorème de comparaison, et d'après (a), le produit infini $\prod \sqrt[n]{n}$ est donc divergent.

2. (a) On a $\ln u_n = \ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$. Comme ε_n est de signe constant, on peut invoquer le théorème sur les équivalents : les séries $\sum \ln u_n$ et $\sum \varepsilon_n$ sont de même nature.

   (b) Si $\alpha \leqslant 0$ alors u_n ne tend pas vers 1 et le produit diverge. Si $\alpha > 0$ alors on a bien u_n qui s'écrit $1+\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ et qui est de signe constant, donc la question a) s'applique : Le produit infini $\prod\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ si et seulement si la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, i.e. si et seulement si $\alpha > 1$.

   (c) D'après a), $\prod\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)$ converge.

   On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2}\right) = \frac{(2n+1)((2n)!)^2}{4^{2n}(n!)^4} \sim \frac{2n}{2^{4n}}\,\frac{(2n)^{4n}4\pi n}{e^{4n}}\,\frac{e^{4n}}{n^{4n}(2\pi n)^2}$ (Stirling) $\sim \dfrac{2}{\pi}$.

   Par conséquent, $\prod\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$

3. On a $\ln(1+\varepsilon_n) - \varepsilon_n \sim -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2$. Comme la série $\sum \varepsilon_n$ converge, la série $\sum \ln u_n$ est de même nature que la série $\sum -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2$ (on peut appliquer ici à nouveau le théorème sur les équivalents car cette dernière série est à termes strictement négatifs).

partie IV

1. Par inégalité triangulaire, on a $|p_n| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|\varepsilon_k|) \leqslant \prod_{k=1}^{+\infty}(1+|\varepsilon_k|) = M$, car ce produit infini converge d'après II. 2.a).
2. Pour $n \geqslant 2$, on a $|p_n - p_{n-1}| = |p_{n-1}(u_n - 1)| = |p_{n-1}||\varepsilon_n| \leqslant M\varepsilon_n$. Par conséquent, la série $\sum |p_n - p_{n-1}|$ converge. La série $\sum (p_n - p_{n-1})$ converge donc aussi.
3. Par conséquent, la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
4. $|\exp(z) - 1 - z| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{|z|^2}{2}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2z^n}{(n+2)!}\right| \leqslant \frac{|z|^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|^2}{2}e^{|z|}$.

   Par conséquent, $e^{-z/n} = 1 - \frac{z}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. On a donc : $(1+\frac{z}{n})e^{-z/n} - 1 = O(1/n^2)$, qui est le terme d'une série absolument convergente. Le produit infini $\prod (1+\frac{z}{n})e^{-z/n}$ est donc absolument convergent.
5. On pose $z_n = a_n + ib_n$. La relation de récurrence donne alors $z_{n+1} = z_n(1 - \frac{i}{(n+1)(n+2)})$. On a donc $z_n = z_0 \prod_{k=0}^{n}(1 - \frac{i}{n(n+1)})$. Or la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge d'après le critère de Riemann, donc d'après les questions qui précèdent, le produit infini $\prod (1 - \frac{i}{n(n+1)})$ converge absolument, donc converge. Conclusion, la suite z_n converge et par conséquent les suites a_n et b_n sont également convergentes.

partie V

Identité d'Euler (1737)

1. **1ère méthode**

   (a) i. Ecrivons le produit de Cauchy de a_n et b_n : $\alpha_j = \sum_{k=1}^{j} a_k b_{j-k}$ puis le produit de Cauchy de α_n et de c_n : $d_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_{n-j}$.

   On a donc :

   $$d_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} a_k b_{j-k} c_{n-j} = a_0b_0c_n + a_0b_1c_{n-1} + a_1b_0c_{n-1} + a_0b_2c_{n-2} + a_1b_1c_{n-2} + a_2b_0c_{n-2} + ...$$

   On voit que ça revient à sommer sur tous les triplets d'indice dont la somme est égale à n. Ce qui donne donc $d_n = \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3 \\ i+j+k=n}} a_i b_j c_k$.

   Justifions la convergence ; par Cauchy, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont ACV alors $\sum \alpha_n$ est ACV et à nouveau, par Cauchy, $\sum d_n$ est ACV.

   ii. Généralisons : Soient $a_{1,n}, a_{2,n}, ..., a_{N,n}$ N suites qui sont chacune le terme général d'une série ACV alors le produit de Cauchy itéré de ces N suites donne $d_n = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_N)\in\mathbb{N}^N \\ k_1+\ldots+k_N=n}} a_{1,k_1} \times ... \times a_{N,k_N}$ et c'est le terme général d'une série ACV.

   (b) i. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_m^{ks}}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{p_m^s} < 1$. Cette série est donc convergente et sa somme vaut $\alpha_m(S) = \frac{1}{1-p_m^{-s}}$.

ii. On calcule le produit partiel : $\prod_{m=1}^{N} \alpha_m(s) = \prod_{m=1}^{N} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_m^{ks}}$.
Il s'agit d'un produit fini de séries absolument convergentes, d'après le résultat établi plus haut sur le produit de Cauchy itéré :
On a :
$$\prod_{m=1}^{N} \alpha_m(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k_1+k_2+....+k_N=n} \frac{1}{p_1^{k_1 s}} \times \frac{1}{p_2^{k_2 s}} \times ... \times \frac{1}{p_N^{k_N s}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k_1+k_2+....+k_N=n} \frac{1}{(p_1^{k_1}...p_N^{k_N})^s}$$

iii. Les entiers $(p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_N^{k_N})$ sont tous distincts par unicité de la décomposition en facteurs premiers et par conséquent, pour tout N :
$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k_1+k_2+....+k_N=n} \frac{1}{(p_1^{k_1}...p_N^{k_N})^s}$ est majorée par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

iv. On a donc $P_N = \prod_{m=1}^{N} \alpha_m(s) \leqslant \zeta(s)$, or $P_{N+1} = P_N \times \alpha_{N+1}(s)$ donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, majorée d'après la question précédente. Elle converge donc vers une limite non nulle. Par conséquent, $\prod_{m=1}^{+\infty} \alpha_m(s)$ converge et sa limite vérifie $\prod \alpha_m(s) \leqslant \zeta(s)$.

v. Par ailleurs, si N_0 est assez grand (en particulier si $N_0 \geqslant p_N$), la somme partielle obtenue à partir du produit partiel ci-dessus contient tous les entiers de l'intervalle $[\![1, p_N]\!]$ car les nombres de cet intervalle ont tous leurs facteurs premiers parmi $p_1, ..., p_N$.
On a donc : $\sum_{n=1}^{p_N} \frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{m=1}^{N_0} \alpha_m(s) \leqslant \zeta(s)$.

vi. Il ne reste plus qu'à invoquer les gendarmes pour en déduire que le produit infini $\prod \alpha_m(s)$ converge et vaut $\zeta(s)$.

(c) Supposons que $\sum \frac{1}{p_m}$ converge.
Les séries géométriques $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_m^k}$ convergent et ont pour somme $\alpha_m(1) = \frac{1}{1 - p_m^{-1}}$.
Or, $\alpha_m(1) - 1 \sim \frac{1}{p_m}$ et d'après la partie III, la convergence de $\sum \frac{1}{p_m}$ entraîne celle du produit infini $\prod \alpha_m(1)$.
Cependant, les calculs de l'avant-dernière question ont montré que $\sum_{n=1}^{p_N} \frac{1}{n} \leqslant \prod_{m=1}^{N} \alpha_m(1)$, on aurait donc $\sum_{n=1}^{p_N} \frac{1}{n} \leqslant \prod_{m=1}^{+\infty} \alpha_m(1)$ ce qui est impossible car il est notoire que la série harmonique diverge.

2. **2ème méthode**

(a) Si la série converge, la suite des restes partiels tend vers 0 donc il existe un entier N tel que $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) soit $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_N^{\alpha_N}$ la décomposition en facteurs premiers de q.
On pose $\beta_1 = \lfloor \frac{\alpha_1}{2} \rfloor, ..., \beta_N = \lfloor \frac{\alpha_N}{2} \rfloor$ et $\gamma_1 = \alpha_1 - 2\beta_1, ..., \gamma_N = \alpha_N - 2\beta_N$. En fait, β_i et γ_i sont les quotients et les restes de la division euclidienne de α_i par 2.
On peut donc écrire $q = k^2 m$ avec $k = p_1^{\beta_1} ... p_N^{\beta_N}$ et $m = p_1^{\gamma_1} ... p_N^{\gamma_N}$ et comme les γ_i valent soit 0, soit 1, m n'a pas de divisieur carré autre que 1. D'où l'existence de l'écriture.
De même, si q s'écrit $k^2 m$ avec m n'ayant pas de diviseur carré autre que 1, alors k et m appartiennent à $\mathcal{A}_n$ et si l'on écrit $k = p_1^{\beta_1} ... p_N^{\beta_N}$ et $m = p_1^{\gamma_1} ... p_N^{\gamma_N}$ alors on doit avoir $\alpha_i = 2\beta_i + \gamma_i$ avec $\gamma_i \leqslant 1$ donc nécessairement, β_i et γ_i sont les quotients et les restes de la division euclidienne de α_i par 2, d'où l'unicité de l'écriture.

(c) $q = k^2 m$. Or, $q \leqslant n$ donc $k^2 \leqslant n \Longrightarrow k \leqslant \sqrt{n}$, donc il y a au maximum $\sqrt{n}$ choix possibles pour k.
Par ailleurs, l'entier m s'écrit uniquement avec les N facteurs premiers $p_1, ..., p_N$, et de plus, les mul-

tiplicités de ces facteurs premiers sont égales à 0 ou à 1, car m est sans diviseur carré. Il y a donc 2^N possibilités pour m.
On en déduit que le cardinal de $\mathcal{A}_n$ est majoré par $\sqrt{n}\,2^N$.

(d) Soit $q \in [\![1, n]\!] \setminus \mathcal{A}_n$, donc q est divisible par p_i avec $i \geqslant N+1$.
Or, il y a au plus $\lfloor \frac{n}{p_i} \rfloor$ multiples de p_i dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
Le cardinal de $[\![1, n]\!] \setminus \mathcal{A}_n$ est donc majoré par $\displaystyle\sum_{i=N+1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p_i} \rfloor \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{n}{p_i} \leqslant \frac{n}{2}$.
Donc $\operatorname{card} \mathcal{A}_n \geqslant \dfrac{n}{2}$.

(e) D'où $\dfrac{n}{2} \leqslant \sqrt{n}\,2^N$, $\forall n \geqslant 1$, ce qui est d'une absurdité abyssale.