

Partie I Définition et premiers exemples

1. (a) Comme $A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $0 \leq \text{card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket) \leq n$. Donc, lorsqu'elle existe, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)$ appartient à $[0, 1]$.
- (b) Si A est une partie finie, alors $0 \leq \frac{1}{n} \text{card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket) \leq \frac{\text{card}(A)}{n}$, et donc par encadrement, $\theta(A) = 0$.
- (c) Si A est une partie de densité α , alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\text{card}(A^c \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = n - \text{card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket)$$

En divisant par n et en passant à la limite, on trouve que $\theta(A^c) = 1 - \alpha$.

2. Un rapide calcul donne que :

$$\frac{1}{n} \text{card}(q\mathbb{N} \cap \llbracket 1, n \rrbracket) = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$$

Or,

$$\frac{n}{q} - 1 \leq \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor \leq \frac{1}{q}$$

Donc, par encadrement, $\theta(q\mathbb{N}) = \frac{1}{q}$.

3. Soit A l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale ne comporte aucun 9. Alors :

$$\frac{1}{10^p} \text{card}(A \cap \llbracket 1, 10^p \rrbracket) = \left(\frac{9}{10} \right)^p \rightarrow 0 \text{ lorsque } p \rightarrow \infty$$

De plus, pour tout $10^{p-1} \leq n < 10^p$, on a :

$$\frac{1}{n} \text{card}(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket) \leq \frac{1}{10^{p-1}} \text{card}(A \cap \llbracket 1, 10^p \rrbracket) = \frac{9^p}{10^{p-1}}$$

Donc, $\theta(A) = 0$.

Partie II : postulat de Bertrand**II.A :**

1. L'entier m est défini par $p^m \leq n < p^{m+1}$ c'est-à-dire $m \leq \frac{\ln n}{\ln p} < (m+1)$.

Autrement dit l'entier m est donné par $m = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$.

2. Soit qp^k le plus grand multiple de p^k qui soit inférieur ou égal à n .

L'entier q est caractérisé par $qp^k \leq n < (q+1)p^k$. On en déduit $q = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Avec ces notations, on a $E_n \cap p^k \mathbb{N} = \{jq^k, 1 \leq j \leq q\}$.

Ainsi $\text{card}(E_n \cap p^k \mathbb{N}) = q = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

On remarque ensuite que $\{j \in E_n, v_p(j) = k\}$ est formé des éléments de E_n qui sont divisibles par p^k mais pas par p^{k+1} c'est-à-dire des éléments de $(E_n \cap p^k \mathbb{N}) \setminus (E_n \cap p^{k+1} \mathbb{N})$.

Ainsi $\text{card}\{j \in E_n, v_p(j) = k\} = \text{card}(E_n \cap p^k \mathbb{N}) - \text{card}(E_n \cap p^{k+1} \mathbb{N}) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$.

Remarque : le résultat est correct pour $k = m$.

En effet $E_n \cap p^{m+1} \mathbb{N} = \emptyset$ et $\left\lfloor \frac{n}{p^{m+1}} \right\rfloor = 0$ donc $\text{card}\{j \in E_n, v_p(j) = m\} = \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor$.

3. Pour tout $k \geq 2$, $v_p(k)$ est l'exposant de p dans la décomposition de k en produit de facteurs premiers. Il est clair alors que $v_p(jk) = v_p(j) + v_p(k)$ pour tous $j, k \geq 2$ (c'est une conséquence de l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers).

Par une récurrence évidente, cela se généralise à un produit quelconque d'entiers.

En particulier $v_p(n) = v_p\left(\prod_{j=2}^n j\right) = \sum_{j=2}^n v_p(j)$.

4. Dans la somme précédente, on se limite bien sûr aux indices j tels que $v_p(j) \geq 1$.

On peut ensuite réorganiser la somme en groupant les valeurs de j pour lesquelles $v_p(j)$ a une valeur k donnée, avec $1 \leq k \leq m$, et on sait d'après la question (2) combien il existe de tels indices.

On obtient alors $v_p(n) = \sum_{j=2}^n v_p(j) = \sum_{k=1}^m k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right)$.

On trouve alors successivement :

$$\begin{aligned} v_p(n) &= \sum_{k=1}^m k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k=1}^m k \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=1}^m k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k=2}^{m+1} (k-1) \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{k=2}^m (k - (k-1)) \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{p^{m+1}} \right\rfloor}_{=0} = \sum_{k=1}^m \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \end{aligned}$$

En conclusion, on a l'égalité $v_p(n) = \sum_{k=1}^m \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$, avec $m = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$.

II.B :

1. On a $(2n)! = (n!)^2 \binom{2n}{n}$ donc $v_p((2n)!) = 2v_p(n) + u_p(n)$ (cf I.3)

Ainsi $u_p(n) = v_p((2n)!) - 2v_p(n) = \sum_{k=1}^{m'} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \sum_{k=1}^m \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ (en utilisant II.A.4).

Pour $k > m$, et notamment si $m < k \leq m'$, on a $p^k > n$ donc $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

On obtient donc $u_p(n) = \sum_{k=1}^{m'} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$ en regroupant les deux sommes.

2. (a) Il s'agit de montrer l'inégalité $u_p(n) \ln p \leq 2n$.

Puisque $u_p(n)$ est un entier, cela équivaut à prouver $u_p(n) \leq m' = \left\lfloor \frac{2n}{\ln p} \right\rfloor$.

Mais on sait que $u_p(n) = \sum_{k=1}^{m'} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$.

Il suffit donc pour conclure d'utiliser l'inégalité $\lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \leq 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

En effet :

$$\begin{cases} 2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x \\ 2x - 2 < 2 \lfloor x \rfloor \leq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x \\ -2x \leq -2 \lfloor x \rfloor < -2x + 2 \end{cases} \Rightarrow -1 < \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor < 2$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$, et le résultat attendu en découle.

- (b) Si $\sqrt{2n} < p$, alors $p^k > 2n > n$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ pour tout entier $k \geq 2$.

Il en découle $u_p(n) = \sum_{k=1}^{m'} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \in \{0, 1\}$.

- (c) Si $\frac{2n}{3} < p \leq n$, alors $2 \leq \frac{2n}{p} < 3$ et $1 \leq \frac{n}{p} < \frac{3}{2}$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor = 2$ et $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1$.

D'autre part $3p > 2n \Rightarrow 9p^2 \geq (2n+1)^2 \Rightarrow 9(p^2 - 2n) \geq 4n(n-4) + 2n + 1$.

Si $n \geq 4$ alors $p^2 > 2n$ puis, pour tout $k \geq 2 : p^k \geq p^2 > 2n > n$.

Donc si $n \geq 4$, de manière analogue à la question (b) : $u_p(n) = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 0$.

Si $n = 3$, alors $\frac{2n}{3} < p \leq n \Leftrightarrow p = n = 3$, et $u_p(n) = v_3 \left(\binom{6}{3} \right) = v_3(20) = 0$.

On a donc montré que si $n \geq 3$ alors : $\frac{2}{3}n < p \leq n \Rightarrow u_p(n) = 0$.

NB : c'est faux si $n = 2$ car alors $p = 2$ et $u_p(n) = v_2 \left(\binom{4}{2} \right) = v_2(6) = 1$.

(d) Si $n < p < 2n$, alors : $1 < \frac{2n}{p} < 2$ et $\frac{1}{2} < \frac{n}{p} < 1$. Il en découle $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor = 1$ et $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 0$.

Pour $k \geq 2$ on a $p^k \geq p^2 > n^2 \geq 2n > n$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

On en déduit : $u_p(n) = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1$.

II.C :

1. On peut se limiter à $0 \leq k \leq n$ car on sait que $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$.

Si $0 \leq k < n$ on a $\binom{2n}{k+1} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} = \frac{2n-k}{k+1} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \frac{2n-k}{k+1} \binom{2n}{k}$.

Mais $0 \leq k < n \Rightarrow 1 \leq k+1 < 2n-k \Rightarrow \frac{2n-k}{k+1} > 1 \Rightarrow \binom{2n}{k+1} > \binom{2n}{k}$.

Ainsi la suite $k \mapsto \binom{2n}{k}$ est strictement croissante pour $0 \leq k \leq n$.

On en déduit que si $0 \leq k \leq 2n$ alors $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.

En utilisant ce résultat pour $0 < k < 2n$, la formule du binôme et $\binom{2n}{n} \geq 2$, on trouve :

$$4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} \leq 2 + (2n-1) \binom{2n}{n} \leq 2n \binom{2n}{n}$$

2. (a) On peut écrire $\Theta_{2m+1} = \prod_{2 \leq p \leq 2m+1} p = \prod_{2 \leq p \leq m+1} p \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p = \Theta_{m+1} \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$.

On a l'égalité $\binom{2m+1}{m} m!(m+1)! = (2m+1)!$

Soit p un entier premier tel que $m+1 < p \leq 2m+1$. Alors p divise $(2m+1)!$.

Mais p est premier avec les entiers de $\{1, \dots, m+1\}$ donc avec le produit $m!(m+1)!$

Il s'ensuit d'après le théorème de Gauss que p divise $\binom{2m+1}{m}$.

$\binom{2m+1}{m} m!$ est donc divisible par le produit des p de $\mathbb{P}$ tels que $m+1 < p \leq 2m+1$.

Il en découle bien sûr $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$ donc $\Theta_{2m+1} \leq \binom{2m+1}{m} \Theta_{m+1}$.

D'autre part $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m}{m} + \binom{2m}{m-1} \leq \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k}$ donc $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

On a donc obtenu $\Theta_{2m+1} \leq \binom{2m+1}{m} \Theta_{m+1} \leq 4^m \Theta_{m+1}$ pour tout $m \geq 1$.

(b) On prouve d'abord la propriété pour tout entier $n \geq 2$, par récurrence forte sur n .

Le résultat est évident sur $n = 2$.

On se donne $n \geq 3$ et on suppose que $\Theta_m \leq 4^m$ pour tout m tel que $2 \leq m < n$.

Il s'agit donc de prouver l'inégalité $\Theta_n \leq 4^n$.

Si n est pair (donc $n \geq 4$), alors $\Theta_n = \Theta_{n-1} \leq 4^{n-1} \leq 4^n$.

On suppose donc que n est impair et on pose $n = 2m+1$ avec $m \geq 1$.

La question précédente donne $\Theta_n = \Theta_{2m+1} \leq 4^m \Theta_{m+1}$.

L'hypothèse de récurrence fournit alors $\Theta_n \leq 4^m 4^{m+1}$ c'est-à-dire $\Theta_n \leq 4^n$.

On a donc obtenu l'inégalité $\Theta_n \leq 4^n$ pour tout entier $n \geq 2$.

- (c) Soit p un diviseur premier de $\binom{2n}{n}$. On sait que $\binom{2n}{n}(n!)^2 = (2n)!$

Ainsi p divise $(2n)!$ donc divise un élément de $\{2, \dots, 2n\}$, donc $p < 2n$.

II.D :

1. Chaque nombre premier de la liste proposée par l'énoncé est inférieur à 2 fois le précédent. Il n'existe donc pas d'entier $n \leq 630$ tel qu'il n'y ait pas aucun entier premier dans $]n, 2n[$.

En effet, par exemple comme 83 est premier, pour tous les entiers n compris entre 42 et 82, alors $83 \in]n, 2n[$, comme 163 est premier, pour tous les entiers n compris entre 82 et 162, alors $163 \in]n, 2n[$ et ainsi de suite.

Comme ces intervalles se recoupent, on en déduit qu'il n'existe aucun $n \leq 630$ tel que $]n, 2n[\cap \mathcal{P} = \emptyset$.

2. D'après (II.B) : $\binom{2n}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}_{2n-1}} p^{u_p(n)}$. Mais par hypothèse $u_p(n) = 0$ si $n < p < 2n$.

On obtient donc la décomposition en facteurs premiers : $\binom{2n}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{u_p(n)}$.

3. On définit les trois ensembles suivants :

$$A_n = \{p \in \mathbb{P}, p \leq \sqrt{2n}\}, B_n = \left\{p \in \mathbb{P}, \sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}\right\}, C_n = \left\{p \in \mathbb{P}, \frac{2n}{3} < p \leq n\right\}.$$

On a bien sûr $\mathbb{P}_n = A_n \cup B_n \cup C_n$ donc $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{u_p(n)} = \prod_{p \in A_n} p^{u_p(n)} \prod_{p \in B_n} p^{u_p(n)} \prod_{p \in C_n} p^{u_p(n)}$

— D'une part $\prod_{p \in C_n} p^{u_p(n)} = 1$ (cf II.B.2.c). En effet $n \geq 3$ donc $\forall n \in C_n, u_p(n) = 0$.

— D'après (II.B.2.b) on a $u_p(n) \leq 1$ pour tout p de B_n .

Il en découle $\prod_{p \in B_n} p^{u_p(n)} \leq \prod_{p \in B_n} p \leq \prod_{p \leq 2n/3} p = \Theta_{2n/3} \leq 4^{2n/3}$.

— Enfin, on sait que $p^{u_p(n)} \leq 2n$ (cf II.B.2.a) pour tout p , et en particulier pour $p \in A_n$. Or $A_n = \{p \in \mathbb{P}, 2 \leq p \leq \sqrt{2n}\}$ est bien sûr constitué d'au plus $\sqrt{2n} - 1$ éléments. On en déduit l'inégalité $\prod_{p \in A_n} p^{u_p(n)} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}$.

Finalement, on a bien obtenu l'inégalité $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{2n/3}$.

4. On a $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{2n/3}$ donc $4^{n/3} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$ donc $\frac{2n}{3} \ln 2 \leq \sqrt{2n} \ln(2n)$.

Cela s'écrit $\frac{\ln(2n)}{\sqrt{2n}} \geq \frac{\ln 2}{3}$ ou encore $\varphi(\sqrt{2n}) \geq \frac{\ln 2}{6}$ avec $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5. φ décroît pour $x \geq e$ car $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$. Or numériquement $\varphi(30) = \frac{\ln 30}{30} < \frac{\ln 2}{6}$ (cette inégalité se justifie par le fait que $2^5 = 32$ donc $5 \ln 2 > \ln 30$ par croissance du logarithme).

Il en découle $\sqrt{2n} < 30$ donc $n < 450$.

6. Cela est contradictoire avec le résultat de la question II.D.1.

Conclusion : le postulat de Bertrand est vérifié pour tout entier $n \geq 2$.

Partie III Densité des nombres premiers

1. Pour tout $m < n$, on a :

$$4^n \geq \prod_{p \leq n} p \geq \prod_{m < p \leq n} p \geq m^{\pi(n) - \pi(m)}.$$

2. En passant au logarithme, on obtient :

$$\pi(n) \leq \frac{n \ln 4}{\ln m} + \pi(m).$$

3. Conformément à l'indication, prenons $m = \left\lfloor \frac{n}{\ln(n)} \right\rfloor$ dans l'inégalité précédente. On obtient alors :

$$\pi(n) \leq \pi\left(\left\lfloor \frac{n}{\ln(n)} \right\rfloor\right) + \frac{n \ln 4}{\ln\left(\left\lfloor \frac{n}{\ln(n)} \right\rfloor\right)}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0,$$

et l'ensemble des nombres premiers est de densité nulle.

Partie IV Une variante du théorème de Cesàro avec réciproque

1. Vu en cours

(a) Non, vu en cours également, le contreexemple proposé était $u_n = (-1)^n$ qui est une suite divergente et pour laquelle, la moyenne de Cesàro converge vers 0.

(b) Pas davantage, pour $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$. Cette suite oscille entre les valeurs 0 et 1, elle diverge donc mais converge en moyenne de Cesàro vers 1/2.

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k| \geq \varepsilon \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \text{card}(A_\varepsilon \cap [1, n]).$$

Comme la limite du membre de gauche est nulle, le terme de droite l'est aussi, ce qui implique $\theta(A_\varepsilon) = 0$.

(b) D'après la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} p_{k+1}(n) = 0.$$

Par conséquent, il existe un rang n_k tel que, pour tout $n \geq n_k$, on a :

$$\frac{1}{n} p_{k+1}(n) \leq \frac{1}{k}.$$

(c) i. Comme $t \mapsto A_t$ est décroissante pour l'inclusion (c'est-à-dire si $s \leq t$, alors $A_t \subset A_s$), on en déduit que, pour tout k :

$$A \cap [1, n_k] = \bigcup_{j \leq k} (A_{1/j} \cap [n_{j-1}, n_j]) \subset A_{1/k} \cap [1, n_k].$$

ii. Par conséquent,

$$\text{card}(A \cap [1, n_k]) \leq p_k(n_k) \leq \frac{n_k}{k-1},$$

et de manière immédiate :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \text{card}(A \cap [1, n_k]) = 0.$$

Pour $n_{k-1} < n \leq n_k$, on écrit :

$$\frac{1}{n} \text{card}(A \cap [1, n]) \leq \frac{1}{n} \text{card}(A_{1/k} \cap [1, n]) \leq \frac{1}{n} p_k(n) \leq \frac{1}{k-1}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout k , A est de densité nulle.

(d) Soit $m \in A^c$. Il existe k tel que $n_{k-1} < m \leq n_k$. Comme $m \in A^c$, on a $m \notin A_{1/k}$, et donc $|u_m| < \frac{1}{k}$. On en déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{\varphi(k)} = 0$.

3. Appliquons la question précédente en remplaçant u_n par $u_n - \ell$. On en déduit qu'il existe une sous-suite de $(u_n \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et dont l'ensemble des indices est de densité 1. D'où le résultat.

Partie V Application aux séries "quasi-harmoniques"

- (a) Non, contreexemple la suite u_n qui vaut $1/n$ si n est un carré parfait, et $1/n^2$ sinon.
 $nu_n = 1$ pour une infinité de valeurs (les carrés parfaits), donc on n'a pas $u_n = o(1/n)$ et $S_n \leq 2\zeta(2)$ en séparant les carrés parfaits des autres, chaque partie de cette somme pouvant être majorée par $\zeta(2)$.
 (b) Remarquons que $u_n = S_n - S_{n-1}$ si $n \geq 1$.
 D'où $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n} = \frac{(S_1 - S_0) + 2(S_2 - S_1) + \dots + n(S_n - S_{n-1})}{n}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k = S_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k.$$
- Par hypothèse, et en utilisant le résultat de Cesàro, il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \rightarrow S$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k \rightarrow S$ également.
 On en déduit que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \rightarrow 0$ et on peut alors appliquer le résultat de la question IV.3.

Exercice 1 : Lemme d'Abel Dini

- (a) Suivons l'indication fournie :

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}^2} \iff \frac{u_n}{S_n^2} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{u_n}{S_{n-1}^2}.$$
 On en déduit que $\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{S_k^2} \leq \frac{u_0}{S_0^2} + \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^2} = \frac{u_0}{S_0^2} - \frac{1}{S_n} + \frac{1}{S_0} \leq \frac{u_0}{S_0^2} + \frac{1}{S_0}$. La série de terme général $\frac{u_n}{S_n^2}$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont bornées, par conséquent $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^2} \text{ converge}}.$
- (b) Utilisons la même comparaison série/intégrale avec cette fois la fonction $t \mapsto 1/t$ qui comme la précédente, est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{u_n}{S_n} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{u_n}{S_{n-1}}.$$
 On en déduit que $\int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{S_{k-1}} \iff \ln(S_n) - \ln(S_0) \leq \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{S_{k-1}}.$
 Or la série $\sum u_n$ diverge et est à termes positifs, donc $S_n \rightarrow +\infty$ ce qui implique que $\ln S_n \rightarrow +\infty$ et d'après l'inégalité précédente, $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_{n-1}} \text{ diverge}}.$
 On a $\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_n - u_n}{S_n} = 1 - \frac{u_n}{S_n}$.
 - Supposons que $\frac{u_n}{S_n}$ tende vers 0, dans ce cas S_n et S_{n-1} sont équivalentes et par conséquent, il en va de même pour $\frac{u_n}{S_{n-1}}$ et pour $\frac{u_n}{S_n}$. Ces deux suites sont à termes positifs, les séries ont donc même nature. Par conséquent : $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.
 - Si $\frac{u_n}{S_n}$ ne tend pas vers 0, alors la série diverge grossièrement. Dans tous les cas : $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n} \text{ diverge}}.$
- (c) La suite $v_n = \frac{u_n}{S_n}$ convient.
 Remarque : Ce résultat signifie qu'il n'y pas de "seuil" à partir duquel une suite serait divergente.
- (a) On effectue à nouveau une comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto 1/t$ entre R_n et R_{n-1} :

$$\frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} \leq \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} \iff \frac{u_n}{R_{n-1}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} \leq \frac{u_n}{R_n}.$$
 On en déduit que $\int_{R_n}^{R_0} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{R_k} \iff \ln(R_0) - \ln(R_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{R_k}.$

Or la série $\sum u_n$ converge, donc $R_n \rightarrow 0$ ce qui implique que $\ln R_n \rightarrow -\infty$ et d'après l'inégalité précédente, $\sum \frac{u_n}{R_n}$ diverge.

On a $\frac{R_n}{R_{n-1}} = \frac{R_{n-1} - u_n}{R_{n-1}} = 1 - \frac{u_n}{R_{n-1}}$.

- Supposons que $\frac{u_n}{R_{n-1}}$ tende vers 0, dans ce cas R_n et R_{n-1} sont équivalentes et par conséquent, il en va de même pour $\frac{u_n}{R_{n-1}}$ et pour $\frac{u_n}{R_n}$. Ces deux suites sont à termes positifs, les séries ont donc même nature. Par conséquent : $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge.

- Si $\frac{u_n}{R_{n-1}}$ ne tend pas vers 0, alors la série diverge grossièrement. Dans tous les cas : $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge.

On effectue encore une comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ entre R_n et R_{n-1} :

$$\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{R_n}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{\sqrt{R_{k-1}}} \leq \int_{R_n}^{R_0} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{R_0} - \sqrt{R_n}) \leq 2\sqrt{R_0}.$$

C'est donc une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées. On en déduit que

$$\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \text{ converge.}$$

(b) $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ convient.

Exercice 2 : DA de la série harmonique

$$1. \quad u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $\sum u_n - u_{n-1}$ converge d'après Riemann. Or, c'est une série télescopique, de somme partielle $u_n - u_1$.

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite γ , et donc : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 - \ln n = u_n - u_1 = \sum_{k=2}^n (u_n - u_{n-1}) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right) = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \varepsilon_k \right)$$

où $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ (développement limité de $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$).

3. La série $\sum \frac{1}{2k^2}$ est, à une constante près, une série de Riemann convergente ; de même pour $\sum \frac{1}{3k^3}$. Quant à $\sum \varepsilon_k$, elle converge absolument, d'après la règle de comparaison des séries par o. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=2}^n \left(-\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \varepsilon_k \right) \right)$$

D'après la question précédente, cette limite vaut $\gamma - 1$, et par conséquent,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k = 1 - \gamma$$

4. Par conséquent, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln n + 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^n \varepsilon_k \\
&= \ln n + 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\
&= \ln n + 1 - 1 + \gamma + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k \\
&= \ln n + \gamma + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k
\end{aligned}$$

Or d'après les sommations des relations de comparaison,

$$\text{on a } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon_k = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} = \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il reste à calculer un développement asymptotique à deux termes de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

$$\text{Pour cela, posons } v_n = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{n}.$$

On a

$$\begin{aligned}
v_{n-1} - v_n &= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-1} \right) \right)
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant un DL de $(1+y)^{-1}$ au voisinage de 0, on obtient, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
v_{n-1} - v_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^{-1} \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
&= -\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit, en sommant entre $n+1$ et $+\infty$, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &= v_n + \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_{k-1} - v_k) + \frac{1}{n} \quad \text{car } v_n \text{ tend vers } 0 \\
&= \frac{1}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} o\left(\frac{1}{k^5}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$