Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les résultats devront être encadrés.
Le devoir se compose d'un problème et de deux exercices.

Problème - Densité d'une partie, postulat de Bertrand et réciproque du théorème de Cesàro

Notations : on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [\![2, n]\!]$ et $\pi(n) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_n)$.
$\pi(n)$ désigne donc le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n.
- Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout p de $\mathcal{P}$, on note $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N},\ p^k \mid n\}$.
$v_p(n)$ est donc l'exposant de p dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers.
On dit que $v_p(n)$ est la *valuation p-adique* de n.
L'égalité $v_p(n) = k$ caractérise donc les entiers n divisibles par p^k mais pas par p^{k+1}.
Par exemple : $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ donc 2024 a pour valuation 2-adique : 3 .

- Pour tout $n \geqslant 2$, on note $E_n = [\![1, n]\!]$ et $n\mathbb{N} = \{kn, k \in \mathbb{N}\}$.
- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de tout réel x.

Partie I – Définition et premiers exemples

La densité d'une partie $A \subset \mathbb{N}$ est, quand elle existe, la limite :

$$\theta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{card}(A \cap [\![1, n]\!])$$

1. (a) Justifier que la densité d'une partie, quand elle existe, est un réel de l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Quelle est la densité d'une partie finie ?
   (c) Supposons qu'une partie A soit de densité α. Montrer que le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ admet une densité que l'on précisera.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la densité de l'ensemble $q\mathbb{N}$.
3. Déterminer la densité de l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale ne comporte aucun 9.

Partie II : postulat de Bertrand

Joseph Bertrand a postulé en 1845 que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe au moins un entier premier p tel que $n < p < 2n$.

II.A :

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $p \in \mathcal{P}$. On note m l'entier k maximum tel que $p^k \leqslant n$.
Par exemple, pour $n = 2024$ et $p = 2$, on trouve $m = 10$ car $2^{10} \leqslant 2024 < 2^{11}$.

1. Donner une expression de m sous la forme d'une partie entière.
2. Pour $1 \leqslant k \leqslant m$, calculer $\mathrm{Card}(E_n \cap p^k\mathbb{N})$ et $\mathrm{Card}\{j \in E_n,\ v_p(j) = k\}$.
3. Justifier l'égalité $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} v_p(j)$.
4. En déduire finalement l'égalité $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

II.B :

Dans les questions qui suivent, on étudie les valeurs possibles de la quantité $u_p(n) = v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$.

1. Montrer que $u_p(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m'} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$ avec $m' = \left\lfloor \dfrac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor$.
2. Vérifier les propriété suivantes :
   (a) $p^{u_p(n)} \leqslant 2n$.
   (b) Si $\sqrt{2n} < p$, alors $u_p(n) \in \{0, 1\}$.
   (c) Si $n \geqslant 3$ et $\dfrac{2}{3}n < p \leqslant n$, alors $u_p(n) = 0$.
   (d) Si $n < p < 2n$, alors $u_p(n) = 1$.

II.C :

Pour tout entier $q \geqslant 2$, on note Θ_q le produit des entiers premiers p qui sont inférieurs ou égaux à q,

$$\text{i.e. } \Theta_q = \prod_{p \in \mathcal{P}_q} p$$

1. Montrer que si $0 \leqslant k \leqslant 2n$, alors $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$. En déduire que $\binom{2n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{2n}$.
2. (a) Pour tout $m \geqslant 1$, montrer que $\Theta_{2m+1} \leqslant \binom{2m+1}{m} \Theta_{m+1} \leqslant 4^m \Theta_{m+1}$.
   $\Big($*Indication :* montrer que si $p \in \mathcal{P}$ vérifie $m + 1 < p \leqslant 2m + 1$, alors p divise $\binom{2m+1}{m}$. $\Big)$
   (b) En déduire que pour tout entier $q \geqslant 2$, on a $\Theta_q \leqslant 4^q$ (Inégalité de Tchebychev).
3. Montrer que tous les diviseurs premiers de $\binom{2n}{n}$ sont strictement inférieurs à $2n$.

II.D :

On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que l'intervalle $]n, 2n[$ ne contienne aucun entier premier.

1. Montrer que l'entier n est nécessairement supérieur ou égal à 631. (indication : on pourra utiliser - sans le démontrer- le fait que les entiers suivants sont premiers : 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631)
2. Montrer que l'hypothèse faite sur n permet d'écrire $\binom{2n}{n} = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}_n} p^{u_p(n)}$.
3. Montrer que $\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{2n/3}$.
   $\Big($indication : $p \in \mathcal{P}_n \Longrightarrow (p \leqslant \sqrt{2n})$ ou $(\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2n}{3})$ ou $(\frac{2n}{3} < p \leqslant n)$ $\Big)$.
4. En déduire que $4^{n/3} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}}$, puis $\varphi(\sqrt{2n}) \geqslant \dfrac{\ln 2}{6}$ avec $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
5. Déduire ce qui précède que n est inférieur à 450.
6. Conclure.

Partie III – Densité des nombres premiers

1. Montrer, à partir de l'inégalité de Tchebychev de la partie II.C, que pour tout $2 \leqslant m < n$, on a
$$m^{\pi(n) - \pi(m)} \leqslant 4^n$$
2. En déduire que $\pi(n) \leqslant \dfrac{n \ln 4}{\ln m} + \pi(m)$.
3. Déterminer la densité de l'ensemble des nombres premiers.
   Indication : On pourra prendre $m = \left\lfloor \dfrac{n}{\ln n} \right\rfloor$ dans l'inégalité précédente.

Partie IV – Une variante du théorème de Cesàro avec réciproque

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $v_n = \left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge vers ℓ.
   (a) La réciproque est-elle vraie ? (i.e. a-t-on $v_n \to \ell \Longrightarrow u_n \to \ell$?)
   (b) La réciproque est-elle vraie si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs ?
2. Dans cette question, on suppose que la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k|\right)$ converge vers 0.
   Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit la partie $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \geqslant \varepsilon\}$.
   (a) Montrer que $\theta(A_\varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k(n) = \operatorname{card}(A_{1/k} \cap [\![1, n]\!])$. Montrer qu'il existe un entier n_k tel que, pour tout $n \geqslant n_k$, on a :
   $$\frac{1}{n}p_{k+1}(n) \leqslant \frac{1}{k}.$$
   On suppose dorénavant que la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (c) On pose $A = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(A_{\frac{1}{k}} \cap [\![n_{k-1}, n_k]\!]\right)$.
      i. Montrer que
      $$A \cap [\![1, n_k]\!] \subset A_{\frac{1}{k}} \cap [\![1, n_k]\!]$$
      ii. Déterminer la densité de A.
   (d) On pose B le complémentaire de A dans $\mathbb{N}^*$.
   Soit φ une fonction croissante strictement telle que $B = \{\varphi(k), k \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} u_{\varphi(k)} = 0$.
3. Conclure que si la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell|\right)$ converge vers 0, alors il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ et dont l'ensemble des indices est de densité 1.

Partie V – Application aux séries "quasi-harmoniques"

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives telle que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge.
   Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) A-t-on $u_k = o(\frac{1}{k})$?
   (b) On pose $v_k = ku_k$. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = S_n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} S_k$.
2. Conclure qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on notera $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_{\varphi(n)} = o(\dfrac{1}{\varphi(n)})$ et dont l'ensemble des indices est de densité 1.

Exercice 1 : Lemme d'Abel Dini

Soient $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et, si la série converge, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. On suppose que la série de terme général u_n diverge.
   (a) En utilisant une comparaison série / intégrale, en encadrant l'intégrale de la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ entre S_{n-1} et S_n, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{{S_n}^2}$ converge.

(b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_{n-1}}$ diverge. En déduire la nature de $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$.

(c) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = o(u_n)$ et telle que $\sum v_n$ diverge.

2. On suppose que la série de terme général u_n converge.

(a) Nature des séries de termes généraux $\dfrac{u_n}{R_{n-1}}$ et $\dfrac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$?

(b) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = o(v_n)$ et telle que $\sum v_n$ converge.

Exercice 2 : développement asymptotique de la série harmonique

Soit la somme partielle d'ordre n de la série harmonique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$.

   En considérant la série de terme général $u_n - u_{n-1}$, montrer qu'il existe une constante γ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

2. En utilisant un développement limité de $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3k^3} - \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k,$$

   où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant $\varepsilon_n = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

3. Après avoir justifié la convergence des séries, montrer que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k = 1 - \gamma$$

4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

♢ ♢

♢

Références historiques

- Le théorème d'Abel[1] - Dini[2] fut d'abord partiellement démontré par Abel en 1828, puis entièrement par Dini en 1867 (cf *Sulle serie a termini positivi*, Annali delle Università Toscane, 9, pg 41-76) avant que l'on retrouve finalement l'énoncé complet d'Abel en 1881 (cf. *sur les séries*, Oeuvres complètes, 2 pp. 197-205).
- Le postulat de Bertrand fut pour la première fois conjecturé en 1845 par Joseph Bertrand[3] qui le vérifia lui-même pour tous les nombres de l'intervalle $[2, 3000000]$.
  La première démonstration date de 1850 et est dûe à Tchebychev[4]. Ainsi le postulat est également appelé théorème de Tchebychev.
  Ramanujan (1887-1920) en donne une démonstration plus simple et Paul Erdös (1913-1996) publia en 1932 une preuve élémentaire utilisant les coefficients binomiaux (c'est de cette preuve qu'est inspirée le problème ci-dessus).

1. Niels Henrik Abel 1802 Frindöe -1829 Froland : mathématicien norvégien au destin tragique ...
2. Ulisse Dini 1845-1918 : mathématicien italien
3. Joseph Bertrand 1822-1900
4. Pafnouty Lvovitch Tchebychev 1821-1894 : mathématicien russe