

Problème 1 :

1. Soit $t > 0$. Supposons $1 + te^{i\theta} = 0$. Alors :

$$te^{i\theta} = -1 \quad \text{donc} \quad t = |te^{i\theta}| = 1.$$

On en déduit $e^{i\theta} = -1$ ce qui est absurde car $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}}$ est bien définie, et continue (par opérations) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étude en 0. On a l'équivalent simple suivant :

$$\frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \sim t^{x-1}$$

qui montre que f est intégrable en 0, par comparaison à un exemple de Riemann ($x - 1 > -1$).

Étude en $+\infty$. On a :

$$f(t) \sim \frac{e^{-i\theta}}{t^{2-x}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{2-x}}\right)$$

donc f est intégrable en $+\infty$, par comparaison à un exemple de Riemann ($2 - x > 1$).

En conclusion, f est bien définie et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $(t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$, on pose :

$$g(t, \theta) = \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}}.$$

Soit $t > 0$. La fonction $\theta \mapsto \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}}$ est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ et de dérivée :

$$\theta \mapsto -\frac{t^x i e^{i\theta}}{(1 + te^{i\theta})^2}$$

Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, la fonction $t \mapsto g(t, \theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Hypothèse de domination. Soit $\beta \in]0, \pi[$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [-\beta, \beta]$.

On a :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \theta}(t, \theta) \right| = \frac{t^x}{|1 + te^{i\theta}|^2} = \frac{t^x}{1 + t^2 + 2t \underbrace{\cos \theta}_{\geq \cos \beta}} \leq \underbrace{\frac{t^x}{1 + t^2 + 2t \cos \beta}}_{=\varphi_\beta(t)}.$$

La fonction φ_β est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\varphi_\beta(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}} \quad \text{avec} \quad 2 - x > 1,$$

ce qui montre que φ_β est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et fournit l'hypothèse de domination sur tout segment.

Conclusion : r est de classe C^1 sur $]-\pi, \pi[$ et :

$$\forall \theta \in]-\pi, \pi[\quad r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt.$$

3. Tout d'abord, la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t > 0 \quad h'(t) = xt^{x-1} \frac{1}{1+te^{i\theta}} - t^x \frac{e^{i\theta}}{(1+te^{i\theta})^2}.$$

Les fonctions $\theta \mapsto e^{ix\theta}$ et r sont de classe C^1 sur $] -\pi, \pi[$. Par produit, g est de classe C^1 sur $] -\pi, \pi[$ et :

$$\forall \theta \in] -\pi, \pi[\quad g'(\theta) = (ixr(\theta) + r'(\theta))e^{ix\theta}.$$

Par linéarité de l'intégrale on en déduit :

$$\forall \theta \in] -\pi, \pi[\quad g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{1+te^{i\theta}} - \frac{e^{i\theta}t^x}{(1+te^{i\theta})^2} dt = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt.$$

Limite de h en 0^+ . Comme $x > 0$, on a, par opérations :

$$h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Limite de h en $+\infty$. On a l'équivalent simple suivant :

$$h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-i\theta}}{t^{1-x}} \quad \text{avec} \quad 1-x > 0.$$

On en déduit :

$$h(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après ce qui précède, l'intégrale $\int_0^{+\infty} h'$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} h' = \lim_{+\infty} h - \lim_{0^+} h = 0.$$

On en déduit :

$$\forall \theta \in] -\pi, \pi[\quad g'(\theta) = 0$$

donc g est une fonction constante sur l'intervalle $] -\pi, \pi[$.

4. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Alors $(\theta, -\theta) \in] -\pi, \pi[$ donc, par la question précédente :

$$g(-\theta) = g(\theta) \quad \text{puis} \quad \frac{1}{2i}(g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}) = g(\theta) \frac{e^{ix\theta} - e^{-ix\theta}}{2i} = g(\theta) \sin(x\theta).$$

En repartant de la définition en g , on a aussi :

$$\begin{aligned} g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta} &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} \left(\frac{1}{1+te^{-i\theta}} - \frac{1}{1+te^{i\theta}} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} \frac{2it \sin \theta}{(1+te^{-i\theta})(1+te^{i\theta})} dt \\ &= 2i \sin \theta \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2+2t \cos \theta} dt, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

5. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Comme $\sin \theta$ est strictement positif, on peut effectuer le changement de variable affine strictement croissant $[t = u \sin \theta - \cos \theta]$ dans la dernière intégrale de la question précédente. On obtient alors :

$$\begin{aligned} g(\theta) \sin(x\theta) &= \sin \theta \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t \cos \theta + t^2} dt \\ &= \sin \theta \int_{\cotan \theta}^{+\infty} \frac{(u \sin \theta - \cos \theta)^x}{1+2u \cos \theta \sin \theta - 2 \cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2u \sin \theta \cos \theta} \sin \theta du \\ &= \int_{\cotan \theta}^{+\infty} \frac{(u \sin \theta - \cos \theta)^x}{u^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta} \sin^2 \theta du \\ &= \int_{\cotan \theta}^{+\infty} \frac{(u \sin \theta - \cos \theta)^x}{1+u^2} du. \end{aligned}$$

6. Pour tout $\theta \in [\pi/2, \pi[$, on pose f_θ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\theta(u) = \begin{cases} \frac{(u \sin \theta - \cos \theta)^x}{1 + u^2} & \text{si } u > \cotan \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :

$$\cos \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} -1 \quad \text{et} \quad \sin \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} 0^+ \quad \text{donc} \quad \cotan \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} -\infty.$$

Soit $u \in \mathbb{R}$. Pour θ assez proche de π^- , on a :

$$f_\theta(u) = \frac{(u \sin \theta - \cos \theta)^x}{1 + u^2} \quad \text{donc} \quad f_\theta(u) \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{1}{1 + u^2}$$

par continuité de $s \mapsto s^x$ en 1.

Hypothèse de domination. Soit $\theta \in [\pi/2, \pi[$ et $u > \cotan \theta$.

Si $u \leq 0$, alors :

$$0 \leq u \sin \theta - \cos \theta \leq 1 \quad \text{donc} \quad |f_\theta(u)| = \frac{(u \sin \theta - \cos \theta)^x}{1 + u^2} \leq \frac{1}{1 + u^2}$$

par croissance de $s \mapsto s^x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Si $u > 0$, alors :

$$0 \leq u \sin \theta - \cos \theta \leq u + 1 \quad \text{donc} \quad |f_\theta(u)| \leq \frac{(u + 1)^x}{1 + u^2}.$$

On dispose donc de la majoration suivante :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |f_\theta(u)| \leq \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ \frac{(u + 1)^x}{1 + u^2} & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, intégrable en $-\infty$ car nulle au voisinage de $-\infty$ et :

$$\varphi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-x}} \quad \text{avec} \quad 2 - x > 1$$

donc φ est intégrable en $+\infty$.

Par le théorème de convergence dominée (et la question précédente), il vient :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \int_{\mathbb{R}} f_\theta(u) \, du \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1 + u^2}.$$

7. Comme g est une fonction constante sur $]-\pi, \pi[$, on a aussi :

$$g(\theta) \sin(x\theta) = g(0) \sin(x\theta) \xrightarrow{x \rightarrow \theta^-} g(0) \sin(x\pi) = \sin(x\pi) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt.$$

Par unicité de la limite, on en déduit :

$$\sin(x\pi) \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Comme $x \in]0, 1[$, on a $x\pi \in]0, \pi[$ donc $\sin(x\pi) \neq 0$ puis :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

8. Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

Dans la seconde intégrale, on effectue le changement de variable $[t = 1/u]$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{u^{1-x}}{1+1/u} \frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u} du.$$

On conclut par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t} dt.$$

9. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x-1+k}.$$

Hypothèse de domination. Soit $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. La suite $(t^{x-1+k})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Par le théorème des séries alternées, on dispose donc de la majoration :

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{x-1+k} \right| \leq t^{x-1}.$$

La fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (exemple de Riemann avec $x-1 > -1$).

Par le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{x-1+k} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{x-1+k} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{x-1+k} dt,$$

ce qui justifie l'interversion série-intégrale :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 t^{x-1+k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}.$$

10. D'après la question précédente, on a :

$$\forall y \in]-1, 0[\quad \int_0^1 \frac{t^y}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{y+1+k}.$$

En remplaçant y par $-x$, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-x+1+k}.$$

Par somme, en utilisant la question 8, on peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+1-x}.$$

11. D'après la question 7 et par décalage d'indice dans la seconde somme, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2}. \end{aligned}$$

12. Soit $y \in]0, \pi[$. On prend $x = y/\pi$ dans ce qui précède pour obtenir :

$$\frac{\pi}{\sin y} = \frac{\pi}{y} - \frac{2y}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - (y/\pi)^2}.$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} 2y \sin y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{y^2 - n^2 \pi^2} &= -2y \sin y \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - (y/\pi)^2} \\ &= \frac{\sin y}{\pi} \left(\frac{\pi}{\sin y} - \frac{\pi}{y} \right) \\ &= 1 - \frac{\sin y}{y}. \end{aligned}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13. Considérons la fonction continue (par opérations) $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $t > 0$ associe $\frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1})}{t^2}$.

Étude en 0. Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = 1$ et que $(1+u)^{2p+1} - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} (2p+1)u$, on a :

$$\left((\cos(t))^{2p+1} - 1 \right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (2p+1) \left(\cos(t) - 1 \right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{2p+1}{2} t^2. \quad (1)$$

Donc $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2p+1}{2}$. Puisque $\int_0^1 \frac{2p+1}{2} dt$ converge et que $\frac{2p+1}{2} \geq 0$, on en déduit que $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge.

Étude en $+\infty$. On remarque que pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{2}{t^2}$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1})}{t^2} dt$ converge.

Posons $\psi_1 : t > 0 \mapsto -\frac{1}{t}$ et $\psi_2 : t > 0 \mapsto 1 - ((\cos(t))^{2p+1})$. D'après l'équivalent obtenu dans la relation (1), on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1})}{t} = 0.$$

Par ailleurs, comme la fonction cos est bornée,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1})}{t} = 0.$$

Ainsi le crochet $[\psi_1 \psi_2]_0^{+\infty}$ converge et est nul. Puisque les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont par ailleurs de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_1'(t) \psi_2(t) dt$ converge d'après la première partie de la question, l'intégration par parties assure d'une part que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_1(t) \psi_2'(t) dt$ converge et d'autre part que $\int_0^{+\infty} \psi_1'(t) \psi_2(t) dt = -\int_0^{+\infty} \psi_1(t) \psi_2'(t) dt$. D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1})}{t^2} dt = (2p+1) \int_0^{+\infty} ((\cos(t))^{2p}) \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que la fonction intégrée est continue sur le segment $[\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi]$. Faisons les changements de variable affines $[s = t - n\pi]$

$$\int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(s))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(s)}{s + n\pi} \right) ds$$

et $[u = -s]$

$$\int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(u))^{2p} \frac{(-1)^n \sin(u)}{u - n\pi} \right) du.$$

En sommant puis en divisant par 2, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{2p} (-1)^n \sin(t) \left(\frac{1}{t + n\pi} + \frac{1}{t - n\pi} \right) \right) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{2p} \frac{(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt, \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la parité de la fonction intégrée.

15. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant de $n = 1$ à $n = N$ la relation trouvée à la question précédente et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + N\pi} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = \sum_{n=1}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt. \quad (2)$$

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \left((\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|f_n(t)| \leq \frac{1}{\pi(n^2 - \frac{1}{4})}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont continues, on en déduit que la série $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. D'où

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left((\cos(t))^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt.$$

La relation (2) se réécrit donc ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + N\pi} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) \right) dt.$$

Or, d'après la question 13, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ converge. On en déduit finalement que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) \right) dt.$$

16. D'après la question 13, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \right) dt$ converge. En utilisant la relation de Chasles

puis la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} ((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt \\
 = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos(t))^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt \\
 = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos(t))^{2p} \left(\frac{\sin(t)}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} \right) dt \\
 = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos(t))^{2p} dt,
 \end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la question 12.

17. On écrit, en utilisant la formule d'Euler puis la formule du binôme de Newton et enfin en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}
 2^{2p}(\cos(t))^{2p} &= (e^{it} + e^{-it})^{2p} \\
 &= \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{ikt} e^{-i(2p-k)t} \\
 &= \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} + \sum_{k=p+1}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} \\
 &= \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)t} + \binom{2p}{2p-k} e^{2i(2p-k-p)t} \\
 &= \binom{2p}{p} + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} (e^{2i(k-p)t} + e^{2i(p-k)t}) \\
 &= \binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t).
 \end{aligned}$$

18. D'après les questions 13 et 16,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt = (2p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos(t))^{2p} dt$$

donc, d'après la question précédente et la linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \frac{2p+1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} + \frac{2p+1}{2^{2p-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(p-k)t) dt.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt) dt = \left[\frac{\sin(2kt)}{2k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - ((\cos(t))^{2p+1}}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \frac{2p+1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} = \frac{\pi}{2} \frac{2p+1}{2^{2p}} \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p} \cdot (p!)^2}.$$

Problème 2 :

I 1) Convergence simple : à x fixé, la série est une somme finie car si $k \geq x$ alors $u_k(x) = 0$.

Il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x > k$ remarquons que $0 < \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} = \frac{x}{x} \times \dots \times \frac{(x-k+1)}{x} < 1$ ce qui implique :

$0 \leq u_k(x) \leq \frac{a^k}{k!}$ qui est le terme général d'une série convergente (dont la somme vaut e^a). Cette

majoration est valable aussi pour $x \in [0, k]$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq u_k(x) \leq \frac{a^k}{k!}$, et ce majorant est indépendant de x ,

Conclusion : il y a donc convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

- 2) à k fixé, $\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} = \frac{x}{x} \times \dots \times \frac{(x-k+1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ donc $u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{a^k}{k!}$. La question précédente avait établi la convergence normale, on peut donc appliquer le Théorème de la Double Limite

pour obtenir :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = e^a$$

- 3) Fixons $z \in \mathbb{C}$.

Par le binôme, on a $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(n)$,

où l'on a défini $v_k(x)$ comme $u_k(x)$ de la question a) en remplaçant a par z .

On pose $a = |z|$. On a donc $|v_k(x)| \leq u_k(x)$, par conséquent la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x)$ converge

normalement sur $\mathbb{R}_+$ et d'après le T.D.L., $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = e^z$$

- II 1) A partir de la relation : $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et du résultat de la question 3), on obtient

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2i}$$

- 2) On factorise P dans $\mathbb{C}[X]$.

Un petit coup de binôme nous fournit le degré de $P : 2n + 1$

et son coefficient dominant 2 (les termes de degré $2n + 1$ ne s'annulent pas).

Soit z une racine de P , z ne peut pas être égale à 1, on peut donc factoriser par $z - 1$ pour obtenir

$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n+1} = 1$, d'où $\frac{1+z}{1-z} = \omega_k$ où ω_k est l'une des racines $2n + 1$ -ème de l'unité.

On a donc $\frac{1+z}{1-z} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)$ avec $k = 0, \dots, 2n$, ce qui donne, par factorisation par l'angle moitié :

$$z_k = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1} = i \tan \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Or étant donné que $\tan(2\pi - \theta) = -\tan(\theta)$, si l'on regroupe les racines deux par deux : z_1 avec z_{2n} , z_2 avec z_{2n-1} , z_3 avec z_{2n-2} , etc ..., en remarquant également que 0 est racine, on obtient :

$$P(X) = 2X \prod_{k=1}^n \left(X - i \tan \frac{k\pi}{2n+1}\right) \left(X + i \tan \frac{k\pi}{2n+1}\right) = 2X \prod_{k=1}^n \left(X^2 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \quad (*)$$

$$\text{D'où : } P(X) = 2X \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{X^2}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \times \prod_{k=1}^n \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Posons $A = \prod_{k=1}^n \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. D'après la relation (*), $2A$ est le coefficient de X dans $P(X)$, donc

$A = 2n + 1$ d'après la définition de $P(X) = (1 + X)^{2n+1} - (1 - X)^{2n+1}$, ce qui achève le calcul.

- 3) D'après 2.a), $\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{ix}{2n+1}\right)$, la formule établie en 2.b) permet alors de conclure :

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right) \right)$$

a) La fonction $h(u) = \tan u - u$ est de dérivée positive et vaut 0 en 0, donc $u \leq \tan(u)$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$ d'où le résultat.

b) Pour $t > 2k$, $0 < \frac{k\pi}{t} < \frac{\pi}{2}$. Si on utilise l'inégalité précédente, on obtient $\tan^2(\frac{k\pi}{t}) \geq \frac{k^2\pi^2}{t^2}$ d'où $t^2 \tan^2(\frac{k\pi}{t}) \geq k^2\pi^2$ et $0 < \frac{a^2}{t^2 \tan^2(\frac{k\pi}{t})} \leq \frac{a^2}{k^2\pi^2} < 1$, donc v_k est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, lorsque $t \rightarrow 2k$ par valeurs supérieures, $\tan^2(\frac{k\pi}{t}) \rightarrow +\infty$, par conséquent : $v_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow 2k^-]{} 0$, ce qui assure la continuité de v_k en $2k$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car ailleurs, v_k est bien continue comme composée de fonctions continues.

c) La série de fonctions $\sum v_k(t)$ converge simplement à t fixé car c'est une somme finie.

d) En reprenant les inégalités de b), pour $t > 2k$, $1 > 1 - \frac{a^2}{t^2 \tan^2(\frac{k\pi}{t})} \geq 1 - \frac{a^2}{k^2\pi^2} > 0$,

d'où $|v_k(t)| = -v_k(t) \leq -\ln\left(1 - \frac{a^2}{k^2\pi^2}\right) = b_k$ et cette majoration est valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus $b_k \sim \frac{a^2}{k^2\pi^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Conclusion : la série de fonctions $\sum v_k(t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) De plus, $v_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ln\left(1 - \frac{a^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Par le théorème de la double limite, on en déduit que $S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{a^2}{k^2\pi^2}\right)$.

En remplaçant t par $2n+1$, on obtient $S(2n+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(2n+1) = \sum_{k=1}^n v_k(2n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{a^2}{k^2\pi^2}\right)$ (la somme est finie car si $2n+1 > 2k$ alors $v_k(t)$ est nulle, donc k ne va que jusqu'à n).

Puis, par continuité de l'exponentielle, $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{a^2}{(2n+1)^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a^2}{k^2\pi^2}\right)$

Pour conclure, il suffit de remplacer a par $|x|$.

Si $|x| < 1$ alors les hypothèses du début de la question 4) sont vérifiées. Si $|x| > 1$, on peut refaire le même raisonnement avec une suite de fonctions $v_k(t)$ en prenant $k \geq K$ où K est le rang à partir duquel $\frac{x^2}{k^2\pi^2} < 1$.

Conclusion : $\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$

III Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1) $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} g_n(t) t^{x-1} dt$.

Appliquons le Théorème de Convergence Dominée à la suite de fonctions $h_n(t) = g_n(t)t^{x-1}$:

(i) h_n converge simplement vers $e^{-t}t^{x-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après 1)a).

(ii) h_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) $0 \leq h_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$, (d'après l'inégalité $\ln(1-x) \leq -x$), et ce majorant, indépendant de n , est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après a).

Par conséquent :
$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

2) On effectue le changement de variable $u = \frac{t}{n}$: $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$

Puis, par I.P.P. successives qui vont abaisser l'exposant de $(1-u)$, on trouve $I_n = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Conclusion :
$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

3) A partir de la relation précédente :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \times \Gamma(1-x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \times \frac{n^{1-x} n!}{(1-x)(2-x)\dots(n+1-x)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1-x^2)(1-\frac{x^2}{4})\dots(1-\frac{x^2}{n^2})} \times \frac{n}{n+1-x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \prod_{k=1}^n (1-\frac{x^2}{k^2})} = \frac{1}{x \prod_{k=1}^{+\infty} (1-\frac{x^2}{k^2})} \end{aligned}$$

Conclusion :
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

4) a) Pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$.

Or $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ par changement de variable.

Conclusion
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

b) La formule des compléments pour x qui tend vers 0 donne $\Gamma(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ car Γ est continue sur

$\mathbb{R}_+^*$ donc en 1, et $\Gamma(x) \sim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x}$.

Or la fonction Γ est continue (c.f. question 1) et positive strictement sur $]0, 1[$. Par conséquent, $\ln(\Gamma)$ est bien définie sur $]0, 1[$.

De plus, $\ln(\Gamma(x)) \sim_{x \rightarrow 0} -\ln x$ et $\ln(\Gamma(x)) \sim_{x \rightarrow 1} x$ donc $\ln \Gamma$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Par la formule des compléments : $\ln(\Gamma(x)) + \ln(\Gamma(1-x)) = \ln(\pi) - \ln(\sin(\pi x))$.

On intègre cette relation sur $]0, 1[$.

Par changement de variable $t = 1-x$, on trouve $2 \int_{]0, 1[} \ln(\Gamma) = \ln(\pi) - \int_0^1 \ln(\sin(\pi x)) dx =$

$\ln(\pi) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln(\sin(u)) du$. On reconnaît l'intégrale d'Euler.

En conclusion :
$$\int_{]0, 1[} \ln(\Gamma) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

IV 1) On peut donc écrire $\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{-x} x(1+x)\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$.

Par ailleurs, $n^{-x} = \exp(-x \ln n) = \exp\left(-x\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \gamma + \varepsilon(n)\right)\right)$.

Etudions le produit $A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right)$.

$\ln A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ avec $a_k = \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \sim -\frac{x^2}{2k^2}$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Donc cette série converge, et en

passant à l'exponentielle, le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right)$ converge également.

$$\text{D'où } \boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}}.$$

2) D'où $\forall x > 0$, $\ln(\Gamma(x)) = -\ln x - \gamma x - \ln \left(\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right) = -\ln x - \gamma x - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right)$.

Donc $\ln(\Gamma(x)) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$ avec $w_n(x) = \frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ (III).

. Chaque w_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$.

. la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge simplement sur $]0, 1]$.

. la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} w'_n$ converge uniformément sur $]0, 1]$.

En effet $\forall x \in]0, 1]$, $w'_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n^2}$, d'où la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} w'_n$ sur $]0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, on peut dériver terme à terme dans (III) et on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1], \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n(n+x)}}.$$

3) Or $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt$. L'intégrale demandée est donc égale à $\Gamma'(1)$.

Or $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \lim \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$. Donc $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -1 - \gamma + \sum \frac{1}{n(n+1)} =$

$-\gamma$. Ainsi $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma}$.

La justification de l'existence de l'intégrale se fait en disant que la fonction $t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, équivalente à $\ln t$ en 0^+ (qui est intégrable) et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ (intégrale de Riemann convergente) en $+\infty$ par croissance comparée.