

Mines Ponts PC Maths 2 2019

1 Préliminaires

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ (il y a même égalité car $f_n(\pi/(2n^2)) = 1/n^2$).Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
 - Par suite, $R : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. • $f : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, 1]$.
 - Pour tout $x \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$.Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, par comparaison, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
 - f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ converge.

2 Calcul de I

1. Effectuons le changement de variable $x^2 = t$ ce qui équivaut à $x = \sqrt{t}$ qui est bien une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.
On obtient : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.
On va ensuite ipéper I en dérivant $\sin t$ et en intégrant $\frac{1}{2t\sqrt{t}}$ en $\frac{-1}{\sqrt{t}}$.
Pour justifier cette ipépé, montrons que le crochet $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ admet des limites en 0 et en $+\infty$:
En 0, cette fonction est équivalente à $\sqrt{t}$ donc tend vers 0, et en $+\infty$, le numérateur est une fonction périodique continue, donc est bornée tandis que le dénominateur tend vers $+\infty$, donc la limite est nulle.
Ainsi le crochet a des limites en 0 et en $+\infty$ qui sont de surcroît toutes les deux nulles. Par conséquent, on obtient $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$.
2. L'intégrale converge mais la fonction n'est pas intégrable car $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale divergente.
Pour le montrer, on considère la série de terme générale $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{t}} dt$.
Par le changement de variable : $u = t - k\pi$, on obtient $u_k = \int_0^\pi \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{t+k\pi}} dt$.
On peut ensuite minorer $u_k \geq \int_0^\pi \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{(k+1)\pi}} dt = \frac{2}{\sqrt{(k+1)\pi}}$, ce qui est le terme général d'une

série divergente. Par conséquent, la série de terme général u_k diverge, ce qui permet d'en déduire la divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{t}} dt$.

3. Montrons φ est définie et continue par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

On pose $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt}$.

- à $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt}$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- à $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue par morceaux.
- Hypothèse de domination : $\left| \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt} \right| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ (intégrale de Riemann convergente sur $]0, 1[$) et $o(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$ (qui également une intégrale de Riemann convergente sur $]1, +\infty[$). Par conséquent, φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

4. $\varphi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \Gamma(1/2)$.

On effectue le changement de variable $t = u^2$ ou $u = \sqrt{t}$ qui est bijectif et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi(0) = \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

5. Appliquons le théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre. Avec les notation précédentes, à $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} e^{ixt}$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = i\sqrt{t} e^{-t} e^{ixt}$.

Hypothèse de domination : $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \sqrt{t} e^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

Il s'ensuit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t} e^{(ix-1)t} dt$.

Ipéons cette intégrale en intégrant l'exponentielle et en dérivant la racine carrée.

Le terme entre crochets vaut $\frac{i\sqrt{t}}{ix-1} e^{(ix-1)t}$ qui vaut 0 en 0 et qui tend vers 0 en module lorsque $t \rightarrow +\infty$.

On obtient donc $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-i}{2(ix-1)\sqrt{t}} e^{(ix-1)t} dt$.

Par conséquent, φ vérifie l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{2(x+i)} y = 0$$

6. Résolvons cette équation différentielle linéaire d'ordre 1. Il faut pour cela calculer une primitive de

$$\frac{1}{2(x+i)} = \frac{x-i}{2(x^2+1)}. \text{ On trouve } \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{i}{2} \arctan x.$$

D'où en tenant compte de la condition initiale $\varphi(0) = \sqrt{\pi}$,

$$\varphi(x) = \sqrt{\pi} \frac{e^{\frac{i \arctan x}{2}}}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

7. Dans la définition de $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$, effectuons le changement de variable $u = xt$ avec $x > 0$.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du$, ce qui donne :

$$\sqrt{x} \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du$$

On aimerait appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu . Le problème est que si l'on majore en module, on ne peut obtenir mieux comme majorant que $\frac{1}{\sqrt{u}}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$.

On va donc couper l'intégrale en 2 :

$$\sqrt{x}\varphi(x) = \int_0^A \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du + \int_0^A \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du$$

Le TCDAPC peut s'appliquer à la première intégrale, on obtient donc que

$$\int_0^A \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

On dégage les ε :

- On a montré dans la question 1 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} dt$ convergeait. On eut pu montrer de même que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} dt$ converge et que par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ est convergente.

Il en résulte qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, $\left| \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \varepsilon$.

- Soit $0 < A' < B'$, on pose $g(u) = \frac{e^{-u/x}}{\sqrt{u}}$. C'est une fonction positive et décroissante.

Ipépons

$$\int_{A'}^{B'} g(u) e^{iu} du = \frac{1}{i} (e^{iB'} g(B') - e^{iA'} g(A')) + i \int_{A'}^{B'} g'(u) e^{iu} du$$

On majore en module :

$$\left| \int_{A'}^{B'} g(u) e^{iu} du \right| \leq g(B') + g(A') + \int_{A'}^{B'} |g'(u)| du \leq 2g(A') + \int_{A'}^{B'} (-g'(u)) du = 3g(A') - g(B') \leq 3g(A')$$

Comme ce majorant ne dépend pas de B' , on peut faire tendre B' vers $+\infty$.

On obtient donc :

$$\left| \int_{A'}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du \right| \leq 3 \frac{e^{-A'/x}}{\sqrt{A'}} \leq \frac{3}{\sqrt{A'}}$$

On choisit donc A' pour que $\frac{3}{\sqrt{A'}} \leq \varepsilon$. (On remarque que cette majoration est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$)

- On pose ensuite $A'' = \max(A, A')$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \geq B$, $\left| \int_0^{A''} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du - \int_0^{A''} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \varepsilon$

- Avec les inégalités précédentes, on obtient, pour tout $x \geq B$,

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du - \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \left| \int_0^{A''} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du - \int_0^{A''} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \right| + \left| \int_{A''}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du \right| + \left| \int_{A''}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \right|$$

d'où

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u}{x}}}{\sqrt{u}} e^{iu} du - \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \right| \leq 3\varepsilon$$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

8. D'après la question 6., $\sqrt{x}\varphi(x) = \sqrt{\pi}e^{\frac{i \arctan x}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1+x^2}}$.

D'après la question 7., on en déduit que

$$\sqrt{\pi}e^{\frac{i\pi}{4}} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

En prenant la partie réelle, il vient :

$$I = \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

9. Effectuons le changement de variable ($\mathcal{C}^1$, bijectif) $u = x^2$, On obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx. \text{ Par parité,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

3 Étude de la dérivabilité de R en 0

1. Pour tout $h > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(nh)| \leq \frac{C}{1+n^2h^2} \leq \frac{c}{n^2h^2}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{C}{h^2n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} |f(nh)|$ converge, donc

$\sum_{n \geq 0} f(nh)$ converge absolument, donc converge, ce qui assure l'existence de $S(h) = h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.

1. Soit $h > 0$.

• Il faut d'abord penser à justifier l'existence de l'intégrale...

φ_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ car sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, φ_h a un nombre fini de discontinuités (les éléments de $h\mathbb{Z} \cap [a, b]$).

Pour tout $t \geq 0$,

$$|\varphi_h(t)| = \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \right| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1}.$$

Or, l'encadrement classique de la partie entière donc, pour $x > 0$, $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

On a donc

$$|\varphi_h(t)| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{t}{h}\right)^2 h^2} = \frac{1}{t^2},$$

donc $\varphi_h(t) = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, φ_h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

De plus, φ_h est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$.

φ_h est donc intégrable sur $\mathbb{R}$, donc, en particulier, $\int_0^{+\infty} \varphi_h(t) dt$ converge.

• Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \varphi_h(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{nh} \varphi_h(t) dt \quad (\text{car l'intégrale converge}) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \varphi_h(t) dt \quad (\text{relation de Chasles}) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) dt \quad (\text{définition de } \varphi_h) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f(kh) dt \quad (\text{car } \forall t \in [kh, (k+1)h[, \frac{t}{h} \in [k, k+1[) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hf(kh) \quad (\text{intégrale d'une constante}) \\
&= h \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kh) = h \sum_{k=0}^{+\infty} f(kh) \quad (\text{car la série converge}) \\
&= S(h).
\end{aligned}$$

2. Pour tout $h \in]0, 1]$, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $t/h \geq 1$ et

$$\begin{aligned}
|\varphi_h(t)| &= \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \right| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1} \\
&\leq \frac{C}{\left(\left(\frac{t}{h} - 1\right)h\right)^2 + 1} \quad (\text{car pour tout } x \geq 1, \lfloor x \rfloor \geq x - 1 \geq 0) \\
&= \frac{C}{(t-h)^2 + 1} \leq \frac{C}{(t-1)^2 + 1} \quad (\text{car } t-h \geq t-1 \geq 0).
\end{aligned}$$

3. • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t-h = \left(\frac{t}{h} - 1\right)h \leq \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \leq \frac{t}{h}h = t.$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} t-h = t$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h = t$, et donc, par continuité de f sur $\mathbb{R}$, donc en t , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) = f(t),$$

• Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \right| \leq \frac{C}{1 + \left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2} \leq C,$$

et, pour tout $t > 1$, $|\varphi_h(t)| \leq \frac{C}{1 + (t-1)^2}$ d'après la question précédente, donc

$$|\varphi_h(t)| \leq \begin{cases} C & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{C}{1 + (t-1)^2} & \text{si } t > 1 \end{cases} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car

— intégrable sur $[0, 1]$ car constante sur ce segment

- intégrable sur $[1, +\infty[$ (car primitive classique en $C \arctan(t-1)$)
- D'où, par le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

4. Prenons $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 (car $\frac{\sin x^2}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \rightarrow 1 = f(0)$), donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} &\leq \begin{cases} \frac{x^2}{x^2} & \text{si } x \in [-1, 1] \quad (\text{car } |\sin(t)| \leq |t| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}) \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)/2} = \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in [-1, 1] \quad (\text{car pour tout } x \in [-1, 1], 0 < (1+x^2)/2 \leq 1) \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } |x| > 1 \quad (\text{car pour tout } |x| > 1, \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \leq 2) \end{cases} \\ &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$, $f(n\sqrt{x}) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2x}$, donc $\frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x})$, donc

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x}) = \sqrt{x} \left(\sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) \right) = \sqrt{x} \left(\sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) - \sqrt{x} f(0) \right) \\ &= \sqrt{x} \left(\overbrace{\underbrace{S(\sqrt{x})}_{\substack{\rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt = \sqrt{\pi/2} \\ x \rightarrow 0^+}} - \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0}}^{\rightarrow \sqrt{\pi/2} \neq 0} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{x} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}. \end{aligned}$$

- Par suite, comme $R(0) = 0$, $\frac{R(x) - R(0)}{x - 0} = \frac{R(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} +\infty$, donc R n'est pas dérivable en 0 (et la courbe représentative de R admet une demi-tangente verticale en 0)

4 Transformée de Fourier

1. f est intégrable, et $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$, ce qui prouve que $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Appliquons le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre :

Soit $g : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(t)e^{ixt}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x, t) = f(t)e^{ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues par morceaux.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x, t) = f(t)e^{ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (exponentielle...)
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(x, t)| = |f(t)| |e^{ixt}| \leq |f(t)|$$

où $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car f l'est).

- $\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t) dt$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre s'applique directement, l'hypothèse de domination étant fournie par l'inégalité précédent. On en conclut que la fonction $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On montre au passage que $|\hat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$

2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que f, f' et f'' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

On remarque que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'$ converge, donc f admet une limite en $+\infty$. Comme f est intégrable, alors cette limite est nulle.

Il en va de même en $-\infty$ et également pour f' .

Ipéons en dérivons $f(t)$ et en intégrant l'exponentielle : l'exponentielle est toujours de module 1 et le crochet tend vers 0 en $\pm\infty$ d'après la remarque précédente. On obtient donc :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{ix} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-ixt} dt$$

On peut réitérer pour les mêmes raisons que précédemment :

$$\hat{f}(x) = \frac{-1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t) e^{-ixt} dt$$

Ceci prouve que $|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(t)| dt$.

Comme $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est un $O(1/x^2)$ en $\pm\infty$, on peut en conclure que $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5 Formule sommatoire de Poisson

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x + 2n\pi)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = |f(x + 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x + 2n\pi)^2}, \quad \text{donc} \quad f(x + 2n\pi) = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

De même, pour tout $n \geq 1$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x - 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x - 2n\pi)^2}, \quad \text{donc} \quad f(x - 2n\pi) = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} f_{-n}(x)$ converge absolument, donc converge.

Par suite, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}(x)$ convergent, donc $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x)$ existe.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n(x + 2\pi) = f(x + 2n\pi + 2\pi) = f(x + 2(n+1)\pi) = f_{n+1}(x),$$

donc $F(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n+1}(x) \stackrel{\text{en posant } j = n+1}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j(x) = F(x)$, donc F est 2π -périodique.

• Comme F est 2π -périodique, F est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si F est continue sur $[0, 2\pi]$. Or :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 2\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$|f_n(x)| = |f(x + 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x + 2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1 + (2n\pi)^2},$$

$$\text{donc } \|f_n\|_{\infty}^{[0, 2\pi]} \leq \frac{C_1}{1 + (2n\pi)^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{[0, 2\pi]}$

converge, donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$.

$F_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est donc continue sur $[0, 2\pi]$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_{-n} est continue sur $[0, 2\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x - 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x - 2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1 + (2(n-1)\pi)^2},$$

$$\text{donc } \|f_{-n}\|_{\infty}^{[0, 2\pi]} \leq \frac{C_1}{1 + (2(n-1)\pi)^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|f_{-n}\|_{\infty}^{[0, 2\pi]}$

converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$.

$F_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$ est donc continue sur $[0, 2\pi]$.

$F = F_0 + F_1$ est donc continue sur $[0, 2\pi]$ comme somme de fonctions continues, et, par suite, F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{f}(n)e^{inx}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_n(x)| = |\widehat{f}(n)e^{inx}| = |\widehat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{1 + n^2},$$

$$\text{donc } \|g_n\|_{\infty} \leq \frac{C_2}{1 + n^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} \|g_n\|_{\infty}$ converge,

donc $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

$G_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_{-n} est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_{-n}(x)| = |\widehat{f}(-n)e^{-inx}| = |\widehat{f}(-n)| \leq \frac{C_2}{1 + n^2},$$

donc $\|g_{-n}\|_\infty \leq \frac{C_2}{1+n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|g_{-n}\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} g_{-n}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

$G_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n}(x)$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

- $G = G_0 + G_1$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues.
- Comme, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, g_n est 2π -périodique, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(x) = G(x),$$

donc G est 2π -périodique.

3. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

- $\sum_{n \geq 0} f_n(t)e^{-ipt}$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}(t)e^{-ipt}$ convergent normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$ car $\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ convergent normalement et $|e^{-ipt}| = 1$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto f_n(t)e^{-ipt}$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

On a donc :

$$\begin{aligned} c_p(2\pi F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t) \right) e^{-ipt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t) \right) e^{-ipt} dt \quad (\text{par définition de } \sum_{n \in \mathbb{Z}}) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) e^{-ipt} dt + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t) \right) e^{-ipt} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) e^{-ipt} dt + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t) e^{-ipt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(t) e^{-ipt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_{-n}(t) e^{-ipt} dt \\ &\quad (\text{interversion } \sum / \int \text{ justifiée grâce aux hypothèses vérifiées avant le calcul}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t + 2n\pi) e^{-ipt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t - 2n\pi) e^{-ipt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t) e^{-ip(t-2n\pi)} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t) e^{-ip(t+2n\pi)} dt \quad (\text{changement de variable affine}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t) e^{-ipt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t) e^{-ipt} dt \quad (\text{car } t \mapsto e^{-ipt} \text{ est } 2\pi\text{-périodique}) \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-ipt} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-ipt} dt \\ &\quad (\text{relation de Chasles et intégrales convergentes car, comme } |f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2}, f \text{ est intégrable}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ipt} dt = \widehat{f}(p). \end{aligned}$$

- De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto \widehat{f}(n)e^{int}$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et $\sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n)e^{int}$ et $\sum_{n \geq 1} \widehat{f}(-n)e^{-int}$ convergent normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.
On a donc

$$\begin{aligned}
 c_p(G) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int} \right) e^{-ipt} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)e^{-i(n+p)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(-n)e^{-i(n+p)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt}_{=0 \text{ si } n \neq p} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i(n+p)t} dt}_{=0 \text{ si } n \neq -p} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(p) \int_0^{2\pi} 1 dt = \widehat{f}(p).
 \end{aligned}$$

- On a donc $c_p(2\pi F) = c_p(G)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, donc, d'après la propriété admise (on a bien aussi $(2\pi F, G) \in (\mathcal{C}_{2\pi})^2$), on a $G = 2\pi F$.
4. Soit $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f\left(\frac{at}{2\pi}\right)$.
- g est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.
 - Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| = \left| f\left(\frac{at}{2\pi}\right) \right| \leq \frac{C_1}{1 + (at/2\pi)^2}.$$

Or, $h : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\frac{C_1}{1+(at/2\pi)^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{C_1(1+t^2)}{1+(at/\pi)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = \frac{C_1\pi^2}{a^2}$, donc il existe A_1 et A_2 tel que

$$\forall t \geq A_1, 0 \leq h(t) \leq \frac{C_1\pi^2}{a^2} + 1 \quad \text{et} \quad \forall t \leq A_2, 0 \leq h(t) \leq \frac{C_1\pi^2}{a^2} + 1.$$

De plus, h est continue sur le segment $[A_1, A_2]$, donc est bornée sur cet intervalle.
 h est donc bornée sur $] -\infty, A_2]$, sur $[A_2, A_1]$ et sur $[A_1, +\infty[$, donc h est bornée sur $\mathbb{R}$.
Soit M un majorant de h sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| \leq \frac{C_1}{1 + (at/2\pi)^2} = \frac{1}{1+t^2} h(t) \leq \frac{M}{1+t^2}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right) e^{-itx} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi xu/a} \frac{2\pi du}{a} \quad (\text{changement de variable affine } u = \frac{at}{2\pi}) \\
 &= \frac{2\pi}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i(2\pi x/a)u} du = \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)
 \end{aligned}$$

Comme pour f , on montre alors l'existence de $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{g}(x)| = \left| \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right| \leq \frac{N}{1+x^2}.$$

• En appliquant alors le résultat de la question précédente à la fonction g , qui vérifie les mêmes hypothèses que f , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(2n\pi), \quad \text{ie} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na).$$

En divisant enfin par 2π de part et d'autres, on obtient bien le résultat demandé.

6 Etude de la dérivabilité de R en π

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n-2}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $t = 0$ car, pour $t = 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!} = i = f(0)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!},$$

et f est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

• Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{2ite^{it^2}t^2 - 2t(e^{it^2} - 1)}{t^4} = 2i \frac{e^{it^2}}{t} - 2 \frac{e^{it^2} - 1}{t^3}.$$

Comme $|e^{it^2}| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f'(t)| = O\left(\frac{1}{t}\right) - O\left(\frac{1}{t^3}\right) = O\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Pour tout $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2i \frac{2ite^{it^2}t - e^{it^2}}{t^2} - 2 \frac{2ite^{it^2}t^3 - 3t^2(e^{it^2} - 1)}{t^6} \\ &= -4e^{it^2} - 2i \frac{e^{it^2}}{t^2} - 4i \frac{e^{it^2}}{t^2} + 6 \frac{e^{it^2} - 1}{t^4} \\ &= -4e^{it^2} - 6i \frac{e^{it^2}}{t^2} + 6 \frac{e^{it^2} - 1}{t^4} = -4e^{it^2} + \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

3. • $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $\int_0^1 e^{ix^2} dx$ converge.

• Soit $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $v'(x) = xe^{ix^2}$, $v(x) = -\frac{i}{2}e^{ix^2}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x} = 0 \text{ car } |e^{ix^2}| = 1.$$

D'où, par intégration par partie, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx = \int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2} dx$.

$$\text{Or, } \left| \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2} \right| = O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

donc, comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $x \mapsto \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, en

particulier, $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2} dx$ converge, et, par suite, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

• $\int_0^1 e^{ix^2} dx$ et $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$ convergent, donc $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

Comme de plus $x \mapsto e^{ix^2}$ est paire, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

4. • Comme f est continue et intégrable (car $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$) sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ d'après la partie 4.

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Posons $u(t) = f(t)$, $u'(t) = f'(t)$, $v'(t) = e^{-ixt}$, $v(t) = \frac{i}{x}e^{-ixt}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{i}{x}e^{ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f(t)}_{=O\left(\frac{1}{t^2}\right) \rightarrow 0} = 0.$$

Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\hat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \left[\frac{i}{x} f(t) e^{-ixt} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{x} f'(t) e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x} e^{-ixt} f'(t) dt.$$

• Posons cette fois $u(t) = f'(t)$, $u'(t) = f''(t)$, $v'(t) = -\frac{i}{x}e^{ixt}$, $v(t) = \frac{1}{x^2}e^{-ixt}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}e^{-ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f'(t)}_{\rightarrow 0 \text{ d'après 2}} = 0.$$

Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\hat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x} e^{-ixt} f'(t) dt \\ &= \left[\frac{1}{x^2} f'(t) e^{-ixt} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} f''(t) e^{-ixt} dt \\ &= -\frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t) e^{-ixt} dt. \end{aligned}$$

- Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(t)e^{-ixt} &= \left(-4e^{it^2} + j(t)\right)e^{-ixt} = -4e^{i(t^2 - xt)} + j(t)e^{-ixt} \\ &= -4e^{i(t-x/2)^2} \times e^{-ix^2/4} + j(t)e^{-ixt} = -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2} + j(t)e^{-ixt}, \end{aligned}$$

où $j(t) = f''(t) + 4e^{-it^2} = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (et ne dépend pas de x).

Par suite, $t \mapsto j(t)e^{-ixt}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, comme $|j(t)e^{-ixt}| = |j(t)| = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \mapsto j(t)e^{-ixt}$ sera intégrable sur $\mathbb{R}$, et, en particulier, $\int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt} dt$ converge et

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |j(t)| dt = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1).$$

De plus, le changement de variable affine $u = t - x/2$ donne la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2} dt = -4e^{-ix^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2} du = -4e^{-ix^2/4} I,$$

car I converge d'après la question 3.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt} dt \\ &= 4e^{-ix^2/4} I + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1) \end{aligned}$$

- On a donc bien

$$\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt = -\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

5. • f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme $f(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $(t^2 + 1)f(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}(1)$, donc $t \mapsto (t^2 + 1)f(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et sur tout fermé borné de $\mathbb{R}$, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| \leq \frac{M}{1 + t^2}.$$

De même, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après la question ??) et $\widehat{f}(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question 4), donc il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(t)| \leq \frac{N}{1 + t^2}.$$

On peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson à f . D'où, pour tout $x > 0$, en prenant $a = \sqrt{x}$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right),$$

ie, comme f est paire et donc $\widehat{f}$ aussi (via le changement de variable $u = -t$),

$$i + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} - 1}{n^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right).$$

Comme toutes les séries suivantes sont absolument convergentes, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} - 1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = F(x) - F(0).$$

On a donc

$$i + \frac{2}{x} (F(x) - F(0)) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\hat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right), \quad \text{ie} \quad F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \hat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \frac{C_2}{1 + \left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{x C_2}{x + 4n^2 \pi^2} \leq x \frac{C_2}{4n^2 \pi^2},$$

donc, en sommant et en utilisant l'inégalité triangulaire généralisée,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_2^2}{4n^2 \pi^2}}_{\text{constante}},$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = O_{x \rightarrow 0^+}(x)$ et, par suite,

$$F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \hat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \hat{f}(0) - \frac{ix}{2} + O_{x \rightarrow 0^+}(x\sqrt{x}).$$

On a donc $b = -i/2$ et $a = \frac{1}{2} \hat{f}(0)$.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x + \pi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} e^{in^2\pi}}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} e^{in^2\pi}}{n^2} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \quad (\text{car } n \text{ et } n^2 \text{ ont la même parité, donc } e^{in^2\pi} = (-1)^n) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{k^2} - \left(F(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} F(4x) - \left(F(x) - \frac{1}{4} F(4x) \right) = \frac{1}{2} F(4x) - F(x). \end{aligned}$$

7. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
 R(x + \pi) &= \operatorname{Im}(F(x + \pi)) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(F(4x)) - \operatorname{Im}(F(x)) \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(F(0) + \sqrt{x} \widehat{f}(0) - 2ix + \underset{x \rightarrow 0^+}{O}(x\sqrt{x}) \right) - \operatorname{Im} \left(F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \underset{x \rightarrow 0^+}{O}(x\sqrt{x}) \right) \quad (\text{q}) \\
 &= -\frac{1}{2}x + \underset{x \rightarrow 0^+}{O}(x\sqrt{x}) \quad (\text{car } F(0) \in \mathbb{R}) \\
 &= -\frac{1}{2}x + \underset{x \rightarrow 0^+}{o}(x).
 \end{aligned}$$

Comme R est impaire (somme de fonctions impaire) et 2π -périodique, on a, pour tout $x < 0$,

$$R(\pi+x) = R(\pi+x-2\pi) = R(-(\pi+(-x))) = -R(\pi+(-x)) = -\left(-\frac{1}{2}(-x) + \underset{-x \rightarrow 0^+}{o}(-x)\right) = -\frac{1}{2}x + \underset{x \rightarrow 0^-}{o}(x).$$

On a donc $R(x) = -\frac{1}{2}x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$.

R est donc définie et continue en π (question 1) et admet un développement limité à l'ordre 1 en π , donc R est dérivable en π et $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.